目 录

第一章 绪 论

第二章 常微分方程组的奇点稳定性理论及其应用

第三章 中心流形定理

第四章 平面系统奇点的分类和极限环

第五章 同宿轨、异宿轨、Poincare 映射及其应用

第六章 分 叉

第七章　混　沌

第八章　孤立子

第一章 绪 论

经典力学的基础是一些“实验事实”。所有这些“实验事实”都只是近似为真,而可用更精确的实验修正或实验推翻。从牛顿力学到爱因斯坦的相对论就说明了这一事实。随着科学技术的发展,实验设备变得更为先进,实验方法在不断改进,所得的实验结果也更为贴近实际力学过程。然而,更新更精确的实验结果在许多情况下说明这样两个事实:一个是处理力学模型的线性化方法在许多模型应用中具有很大的局限性,线性化可能导致很大的误差,甚至导致结论与实际情况十分不相符;另一个事实是原来被忽略的一些因素事实上对力学模型影响很大,而这些被忽略的因素表现为往往很难用线性化方法处理,并且还表现为强非线性性。

动力学问题一开始就是非线性的,如用牛顿定律描述的行星运动微分方程(二体问题及三体问题)。大多数力学问题本质就是非线性的,它们一般由非线性方程来描述。自从17世纪牛顿奠定了力学的基础(经典力学)之后,到19世纪末,力学已形成了相当完整的理论体系。在此期间,力学主要放在定量研究上。对于非线性动力学方程,人们除了直接寻找它们的封闭形式的解析解之外,还经常用线性化方法化为线性近似方程去求解。然而,理论和实验分析都发现,非线性方程在大多数情况下不存在封闭形式的解析解。此外,线性化方法只有在一定的条件下才能给出较为准确的结果。

随着科学技术的发展,许多实用技术问题需要知道系统的长时期行为。例如,估计卫星在轨道上运行寿命问题。这里的寿命问题不是指构成卫星硬件的使用寿命。我们都知道,当卫星发射到预定轨道后,由于各种因素的作用,随着时间的推移,卫星会慢慢地偏离预定轨道,当偏离到一定的程度时,卫星不能完成所要求完成的任务,这时或者废弃该卫星,或者通过变轨方法将其变回到预定轨道附近。但由于卫星所带的燃料有限,我们只能对其进行有限次变轨。因此无论怎样卫星的飞行寿命也会结束。估计卫星在预定轨道飞行的起始时间到废弃该卫星的时间就是要研究描述卫星在轨道飞行运动方程的长时期行为。另外,各类控制问题也属于系统的长时期行为研究问题。控制就是在系统上施加一定的影响,使系统在一段时间内从一个状态达到某一预定的状态。

非线性动力学就是随着力学本身发展的要求和解决各种实际问题的需要而产生的。非线性动力学研究的是系统的定性行为和定量行为,尤其是系统的长

时期行为。其中主要包括系统的各种稳定性,描述轨道的混沌现象,以及描述随参数改变的系统的分叉行为。

为了让学者易于理解本书的内容,作者将在本绪论中首先给出一些最原始的概念。然后,我们将在以后各章中给出这些原始概念对应的严格的数学定义和举例说明。

1.1 什么是动力系统

动力系统是指按时间发展的系统。例如,一个物体在外力的作用下其运动状态随着时间的变化而变化,这就是一个动力系统。描述物体的这种按时间变化的规律就是牛顿运动方程。因此,在数学上就把牛顿运动方程称为一个动力系统。描述流体运动的 Navier-Stokes 方程是一个动力系统。描述虫口变化的递推关系 $x_{n+1}=1-\mu x_n^2$($\mu\in(0,2)$,$x_n\in[-1,1]$,n 的单位为年)也是一个动力系统。

牛顿运动方程和 Navier-Stokes 方程描述的系统是按连续时间变化的,因此称这种系统为连续动力系统;而虫口模型描述的系统是按离散时间变化的,因此称这种模型为离散动力系统。事实上,连续动力系统的离散化就成为离散动力系统。例如,解常微分方程及偏微分方程的数值方法,就是把连续动力系统化为离散动力系统。

动力系统可按不同的标准进行分类。例如,上面以时间为标准将动力系统分为连续动力系统和离散动力系统;而以维数为标准时可分为有限维动力系统和无限维动力系统等,Navier-Stokes 方程是无限维动力系统。

1.2 什么是非线性动力学

非线性动力学是研究非线性动力系统的各种运动状态的定性和定量变化规律(即动力学特性),尤其是系统的长时期行为。

经典非线性动力学是以摄动(或称为扰动)、渐近分析的方法研究弱非线性弱耦合的系统。而现代非线性动力学与经典非线性动力学不同,研究的是系统的定性和定量变化规律,其使用的方法是精确方法,所研究的系统具有强非线性性,其研究对象主要包括分叉、混沌、分形、孤立子等新的现象,其主要任务是探索非线性力学现象的复杂性。

1.3 奇 点

奇点的概念来自于物理概念“源”和“汇”,以及来自理论力学中平衡的概念。太阳是光源,其光线从太阳出发射向各个方向。电灯也是如此。“源”有其数学对应概念,也就是数学上一种不稳定奇点。“汇”也有实际模型,试想像一下“漩涡”,在“漩涡”附近放一小纸片,小纸片将流入“漩涡”中心,这个中心就是“汇”;再试想像一下如在地势低洼处有一个洞,其四周的水将流入洞中 ,这个洞就是“汇”。“汇”对应数学上稳定“奇点”。

下面回忆一下理论力学中物体处于平衡的概念:在惯性系中,一个物体处于平衡是该物体相对该惯性系处于静止或做匀速直线运动。众所周知,一个质量为 m 的质点,若其运动速度为 v,在外力 $F=F(v)$作用下的运动满足牛顿运动方程 $m\dot{v}=F$。从这个方程知,当物体处于平衡时,有 $\dot{v}=0$,从而此时 $F(v)=0$。从这个思想出发,我们可以定义动力系统的奇点(或平衡态)。

动力系统的奇点(或平衡态):它是动力系统变量的一组值,关于这组值,系统不随时间变化而变化,即奇点是系统不随时间而变化的解。

① 对于连续动力系统

$$\dot{x}=f(x)\qquad x\in\mathbf{R}^n$$

若 x^* 是它的一个奇点,因 x^* 与时间无关,则 $dx^*/dt=0$,因而 $f(x^*)=dx^*/dt=0$,即奇点是代数方程 $f(x)=0$ 的解。反之也成立。

② 同理可证,对于离散动力系统

$$u_{n+1}=f(u_n)\qquad u_{n+1},u_n\in\mathbf{R}^n$$

它的奇点是代数方程 $u=f(u)$的解,因此也叫不动点。

下面我们将给出奇点的几何分类。动力系统的奇点是微分方程的一组解。其分类方式受到“汇”与“源”的概念的启发,即考虑奇点附近的轨线随着时间无限增加时是进入奇点,还是远离奇点。

奇点的稳定性:若奇点在受一小扰动后,当时间无限增加时返回该奇点,则称该奇点是稳定的,也把这种奇点称为“汇”。以此为标准,将奇点分为稳定奇点和不稳定奇点。进一步,我们可以把不稳定奇点再分为两类:一类与“源”的概念相对应,即奇点附近的任一轨线随着时间无限增加时,总是远离奇点;另一类是介于“汇”与“源”之间的奇点叫做“鞍”,在“鞍”的附近,当时间无限增加时,有轨线进入奇点,也有轨线远离奇点。

我们可以用奇点附近的轨线分布图(即奇点的局部相图)来描述奇点与其附近轨线的关系。各种奇点的相图如图 1.1 ~ 图 1.4:

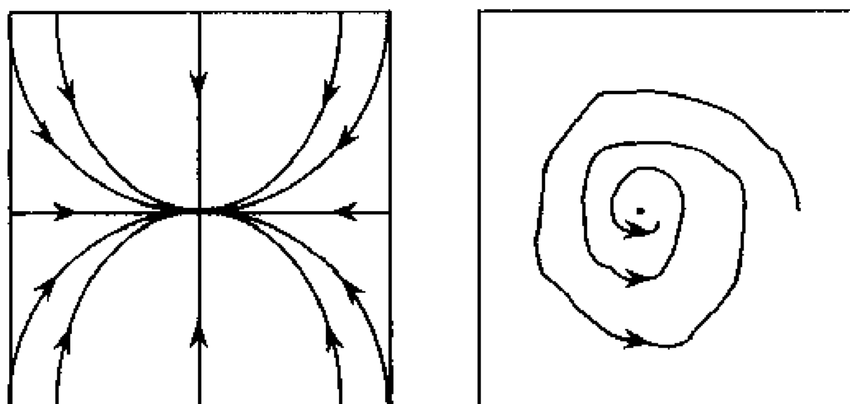


图 1.1 平面上“汇”的相图

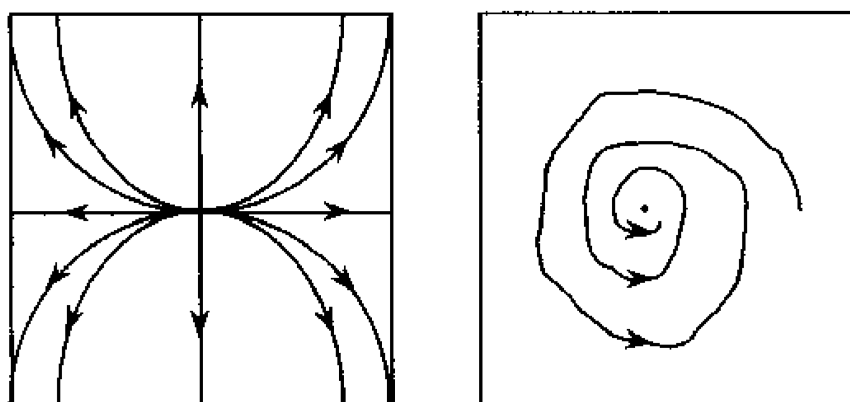


图 1.2 平面上“源”的相图

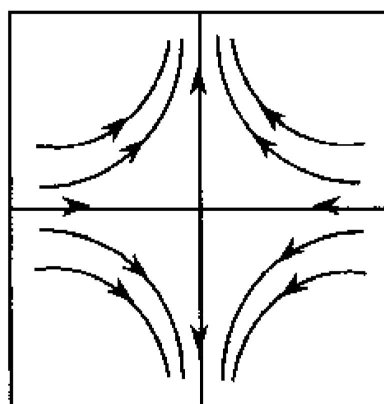


图 1.3 平面上“鞍”的相图

考虑单摆运动,其牛顿运动方程为 $\ddot{\varphi}=a\sin\varphi$。这个方程有两个奇点 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi$。如果考虑实际情况,即有空气阻力的情况下,在 $\varphi=0$ 附近将单摆放下后,在时间无限增加时,单摆的振幅越来越小,最后停在奇点位置(平衡位置),因此 $\varphi=0$ 是稳定奇点(如图 1.5)。但在 $\varphi=\pi$ 附近处放下单摆后,单摆向下摆,

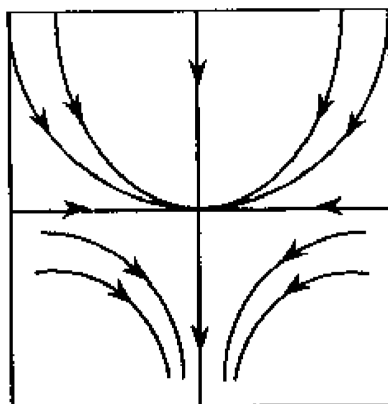


图 1.4 平面上"半鞍"的相图

不会回到 $\varphi=\pi$ 的位置，因而 $\varphi=\pi$ 是不稳定奇点(如图 1.6)。

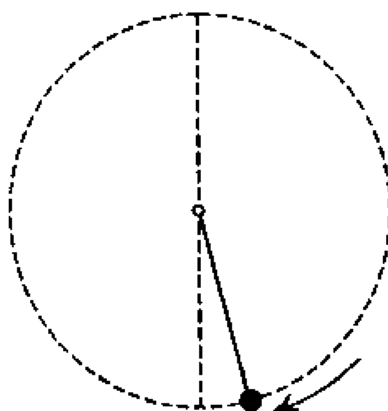


图 1.5 $\varphi=0$ 是稳定奇点

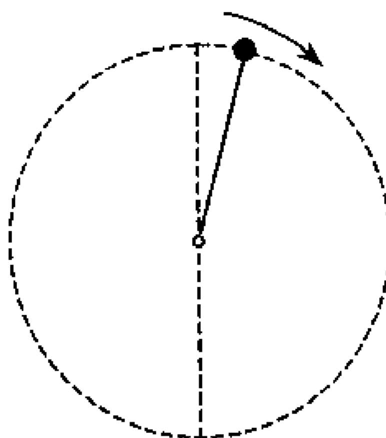


图 1.6 $\varphi=\pi$ 是不稳定奇点

1.4 闭 轨

闭轨也称为周期轨。对于这种轨道的研究有十分重要的意义。对于闭轨的稳定性研究，能解释地球为什么总是围绕太阳转，人造卫星能在其轨道运行若干年。1926 年 Van der Pol 在研究三极管等幅振荡时，研究了微分方程 $\ddot{x}+(x^2-1)\dot{x}+x=0$，证明该方程存在孤立的闭轨。这一结论在无线电发报发明过程中起了重要作用。这结论说明在孤立的闭轨附近发出的无线电波在其传播过程中保持一定波形，不会使其从一个地方传到另一个地方后变得不能辨别、或完全消失。

闭轨：它是动力系统过某一点的一根轨线，从该轨线上任一点出发，当时间增加时，在有限时间内返回该点。

与奇点的几何分类类似，我们也可以把闭轨分为两类。一类是稳定的闭轨，另一类是不稳定的闭轨。

稳定闭轨：若在闭轨附近出发的轨线，当时间无限增加时，无限接近该闭轨，称这种闭轨为稳定闭轨。

地球围绕太阳作周期运动，由于其运行轨道是稳定的闭轨，所以虽然有许多因素的干扰，但地球总能回复其原运行轨道。

不稳定闭轨也可以分为两类：一类是闭轨附近的所有轨线随着时间无限增加时，都远离该闭轨；另一类是既有远离该闭轨的轨线，也有无限接近该闭轨的轨线。在平面上可以画出它们的相图(即闭轨附近的轨线分布图)，如图 1.7, 1.8, 1.9 所示。不稳定轨道的性质可以用来解释卫星为什么在运行若干年后会坠毁。

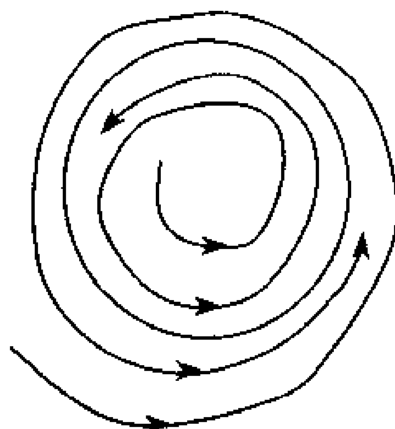


图 1.7 平面上“稳定闭轨”相图

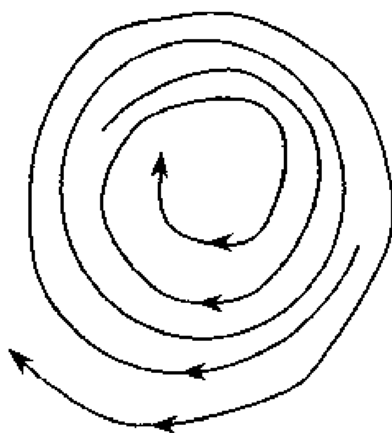


图 1.8 平面上"不稳定闭轨"相图

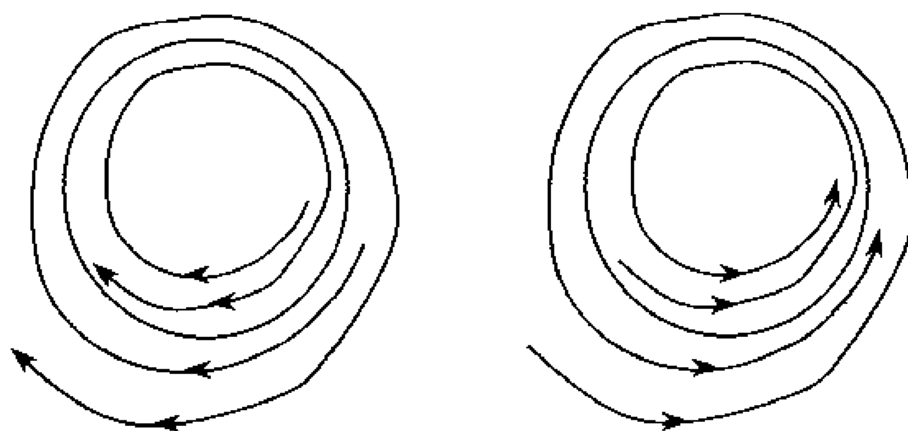


图 1.9 平面上"半稳定闭轨"相图

1.5 同宿轨和异宿轨

同宿轨和异宿轨在非线性动力学中是一个十分重要的研究对象。它和奇点及闭轨一起是分叉与混沌理论中起关键作用的因素。

同宿轨:当 $t\to+\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时,进入同一奇点的轨线称为同宿轨(见图1.10)。

异宿轨:当 $t\to+\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时,进入不同奇点的轨线称为异宿轨(见图1.11)。

同宿轨或异宿圈的破裂是通向混沌的一条途径。

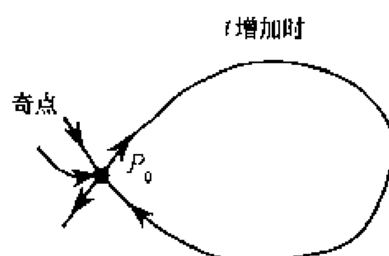


图 1.10 “同宿轨”图像

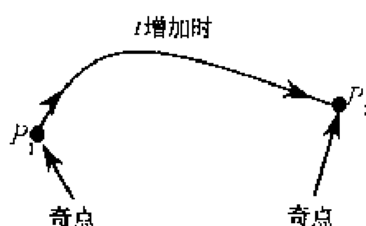


图 1.11 “异宿轨”图像

1.6 分 叉

分叉是研究带有参数的动力系统随着参数的改变,系统的定性行为和定量行为的改变。

这里的定性行为主要是指奇点和闭轨的稳定性及同宿轨与异宿轨的破裂。而定量行为主要是指系统的奇点与闭轨的个数的变化。

在这里我们不用数学上的结构稳定性来定义分叉,它是一种拓扑上的定义,对于工科学生难以理解。本书中采用比较直观的定义。

1.7 混 沌

到目前为止,还没有一个很好的关于混沌的操作定义。在数学上有一种Smale马蹄意义下的混沌定义,这个定义对于工科学生来讲难于理解。但当它联系到同宿轨与异宿轨时,它是一个有效的可操作的定义。还有许多其他的混沌定义方式,在这里不一一指出。

然而,不论哪一种混沌定义,都有一个共同的特点:在参数空间的一定范围内,确定性的非线性系统出现长期行为对初值的敏感依赖性。混沌系统是终极端敏感地依赖于初始状态的系统。在混沌运动中,初始值非常靠近的两条轨道,随着时间的发展会指数分离。这也就是说,对轨道的长时期行为不可能做出准

确的预测。

对于保守系统，满足不同初始条件的解不会同时趋于同一点集；而对于耗散系统，满足不同初始条件的解可能趋于同一点集，这种点集被称为吸引子。混沌运动的吸引子通常具有非整数维，因而也称为奇怪吸引子。

1.8 孤立子

它是动力系统的一种特殊解，这种解在运动过程中保持能量守恒，保持一定的波形。描述浅水波运动的 KdV 方程 $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$ 是一非线性偏微分方程，要求出它的一般解是十分困难的。然而它的孤立子解能很好地解释浅水波的运动。

思考题

1. 试找出在你所从事的专业范围内的一些非线性动力系统。
2. 你能找出一些非动力系统吗？

第二章 常微分方程组的奇点稳定性理论及其应用

常微分方程组的奇点是该微分方程组的不随时间变化的解。分辨奇点与其附近轨线的关系是一个十分基本而重要的问题。描述这种关系的是奇点的各种稳定性定义,而判别这种关系是什么样的关系的工具是各种稳定性定理。

2.1 常微分方程组的奇点稳定性定义

考虑如下一般的一阶 n 维常微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2.1}$$

我们也可以把上面的微分方程组写成一个统一形式,即矢量形式。若记

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n\qquad f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}$$

那么微分方程组(2.1)可以写成如下矢量形式:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\tag{2.1$'$}$$

形式(2.1)在进行计算时很方便,而形式(2.1)′在叙述上很方便。

定义 2.1 n - 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 称为微分方程组(2.1)或(2.1)′的一个奇点,如果 $\boldsymbol{x}_0$ 是代数方程 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=0$ 的一个解。

例 2.1 考虑 Lorenz 系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\sigma(-x_1+x_2)\\ \dot{x}_2=-x_1x_3+\mu x_1-x_2\\ \dot{x}_3=x_1x_2-bx_3\end{cases}$$

这里 $b>0$。显然当 $\mu\leqslant1$ 时,该系统只有一个奇点(0,0,0);而当 $\mu>1$ 时,该系统有三个奇点(0,0,0)及$(\pm\sqrt{b(\mu-1)},\pm\sqrt{b(\mu-1)},\mu-1)$。

从这个例子可以看出,求一个常微分方程组的奇点是一件十分容易的事情,因为我们只须解一些代数方程。我们在绪论中已经看到,奇点附近的轨线的走向决定该奇点的性质。这样就提出一个问题,怎样确定奇点附近轨线的走向?为此目的,我们将引进各种稳定性定义。在给出这些稳定性定义之前,我们先将微分方程组(2.1)在奇点附近线性化。

设 $x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 是方程组(2.1)的一个奇点,那么

$$f_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.2}$$

在奇点 x_0 附近考虑函数 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的泰勒展开

$$\begin{aligned}&f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\cdot(x_j-x_j^0)+O(|x-x_0|^2)\end{aligned}$$

这里 $i=1,2,\cdots,n$, $|x-x_0|=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2}$。由式(2.2),上面方程组可写为

$$\begin{aligned}&f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\cdot(x_j-x_j^0)+O(|x-x_0|^2)\quad(i=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{2.3}$$

由式(2.3),方程组(2.1)可写为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)\cdot(x_1-x_1^0)+\cdots+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)\cdot(x_n-x_n^0)+O(|x-x_0|^2)\\ \vdots\\ \dot{x}_n=\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)\cdot(x_1-x_1^0)+\cdots+\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_n)\cdot(x_n-x_n^0)+O(|x-x_0|^2)\end{cases} \tag{2.4}$$

这样把微分方程组(2.1)分为两部分,一部分为坐标的线性函数,另一部分在奇点附近是二阶无穷小。为了方便起见,把方程组(2.4)写成矢量形式

$$\dot{x}=Df(x_0)\cdot(x-x_0)+O(|x-x_0|^2) \tag{2.5}$$

这里

$$Df(x_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0)\end{pmatrix}$$

称为微分方程组(2.1)在奇点 x_0 处的线性化算子(或导算子)。

在我们把方程组(2.1)在奇点 x_0 附近化为形式(2.5)后,我们自然会提出一个这样的问题,(2.5)式的线性部分

$$\dot{x}=Df(x_0)\cdot(x-x_0) \tag{2.6}$$

在奇点 x_0(x_0 显然是线性微分方程组(2.6)的一个奇点)的行为与微分方程组(2.1)在奇点 x_0 的行为有什么关系?下面我们将讨论这个问题。为了方便起见,我们称线性微分方程组(2.6)为非线性微分方程组(2.1)在奇点 x_0 处的线化

方程。

定义 2.2(谱稳定性) 方程组(2.1)在奇点 x_0 处称为是谱稳定的，如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点的线性化算子 $Df(x_0)$ 的所有特征值的实部都是非正的。

例 2.2 考虑如下二维系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2\end{cases}$$

它有奇点 $(x_1^0, x_2^0) = (k\pi, 0)(k \in \mathbf{Z})$，且

$$Df(x_1^0, x_2^0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos k\pi & -1 \end{pmatrix}$$

该矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \cos k\lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + \cos k\pi = 0$$

则有 $\lambda_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 - 4\cos k\pi})/2$，那么

① 当 k 是偶数时，$\lambda_{1,2} = (-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})$，此时奇点是谱稳定的；

② 当 k 是奇数时，$\lambda_{1,2} = (-1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2})$，有一个特征根是正的，因而此时奇点是谱不稳定的。

定义 2.3(线性稳定) 设 $x(t)$ 是线性方程组(2.6)的任意解。微分方程组(2.1)的奇点 x_0 称为是线性稳定的，如果对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $|x(0) - x_0| < \delta$ 时，$|x(t) - x_0| < \epsilon$ 对一切 $t > 0$ 成立。

线性稳定性可推出谱稳定性。因为若谱中有一个严格为正的实部的特征根的话，必存一个不稳定的特征空间(它实际上是解的不变子空间)，从而线性不稳定。反之却不成立。下面举一个例子说明这一点。

例 2.3 考虑二维系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1\end{cases}$$

它有唯一奇点(0,0)，且

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因而在奇点(0,0)的导算子有二重特征根 $\lambda = 0$，从而它是谱稳定的。另一方面，在奇点(0,0)的线性化方程组为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1\end{cases}$$

显然，该线性方程组的解为

$$x_1 = c_1 \qquad x_2 = c_1 t + c_2$$

这里 c_1, c_2 为任意常数。因此，$|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{0}| = \sqrt{c_1^2 + (c_1 t + c_2)^2} \to +\infty$（只要 $c_1 \neq 0$ 且 $t \to +\infty$），由此说明奇点(0,0)是线性不稳定的。

对于有限维情形，线性稳定的必要条件是导算子 $Df(\boldsymbol{x}_0)$所有特征值有非正实部，并且如果有纯虚根的话，所有纯虚根都是单重根。Arnold(1978)证明，如果存在纯虚重根，当系统产生共振时会出现不稳定性。

证明线性稳定性的一种有效方法是所谓的能量 Casimir 函数方法。这种方法将会在以后给出。联系到这种方法有一种稳定性定义，即形式稳定性定义。

定义 2.4(形式稳定)　微分方程组(2.1)在奇点 $\boldsymbol{x}_0$ 是形式稳定的，如果存在方程组(2.1)的一个满足以下条件的守恒量 H:

① $DH(\boldsymbol{x}_0) = 0$;

② $D^2 H(\boldsymbol{x}_0)$是正定或负定的。

其中 $DH(\boldsymbol{x}_0)$是 H 在$\boldsymbol{x}_0$ 点的梯度，而 $D^2 H(\boldsymbol{x}_0) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\right)_{n\times n}$ 是H 在$\boldsymbol{x}_0$ 点的 Hesse 矩阵。

将守恒量 H 在奇点$\boldsymbol{x}_0$ 附近作泰勒展开得

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x}_0) &= DH(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}\cdot D^2 H(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + O(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^3) \\ &= (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}\cdot D^2 H(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + O(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^3) \end{aligned}$$

上式说明：由于 H 的 Hesse 矩阵在 $\boldsymbol{x}_0$ 点是正定或负定的，因此可以用 H 定义一个度量，使其沿线性方程组(2.6)的解是不变的，因此从形式稳定可以推出线性稳定。反之却不成立，反例将在 Liapunov 稳定性定义之后给出。

下面我们给出最常用最强的一种稳定性定义：Liapunov 稳定性（或非线性稳定性）定义。

定义 2.5(Liapunov 稳定)　设 $\boldsymbol{x}(t)$是方程组(2.1)的任一解。微分方程组(2.1)的奇点 $\boldsymbol{x}_0$ 称为是 Liapunov 稳定的，如果对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_0| < \delta$ 时，对于一切 $t > 0$，有 $|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_0| < \epsilon$，如果还有 $\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 是渐近稳定的。

这个定义的几何解释如图 2.1 和图 2.2 所示。

对于有限维系统来说形式稳定与 Liapunov 稳定是等价的。而对无穷维空间则不是如此。我们在本章给出形式稳定性定义，主要是为了方便讲解能量 Casimir函数方法。

从前面的知识可以看出 Liapunov 稳定必定线性稳定，因而也必定谱稳定，反

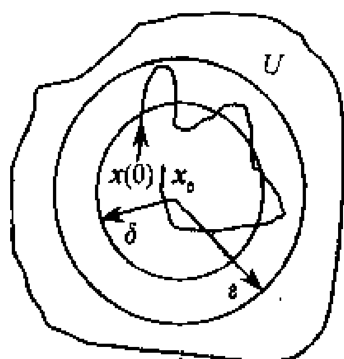


图 2.1 Liapunov 稳定在 $\mathbf{R}^n$ 中的示意图

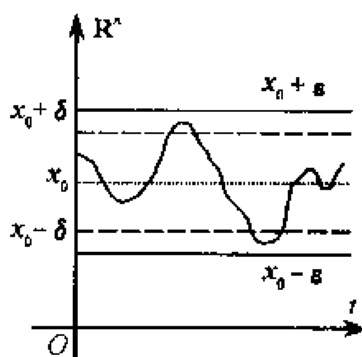


图 2.2 Liapunov 稳定在 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 中的示意图

之则不成立。因此谱稳定只是Liapunov稳定的必要条件。由此可以看出谱不稳定必定Liapunov不稳定。

例 2.4 对于 $\mathbf{R}^2$ 中 Hamilton 函数 $H=p^2+q^2-q^4$,它对应的 Hamilton 方程为

$$\begin{cases}\dot{q}=2p\\ \dot{p}=-2q+4q^3\end{cases}\tag{2.7}$$

显然(0,0)是它的一个奇点,在这个奇点的线性化方程为

$$\begin{cases}\dot{q}=2p\\ \dot{p}=-2q\end{cases}\tag{2.8}$$

显然系统(2.8)的解是

$$\begin{cases}q=c_1\cos2t+c_2\sin2t\\ p=-c_1\sin2t+c_2\cos2t\end{cases}$$

由此可知系统(2.7)是线性稳定的。另一方面,系统(2.7)有一个首次积分 $p^2+q^2-q^4=c$,因此可以很容易画出他的相图(即它的轨线分布图),如图 2.3 所示。

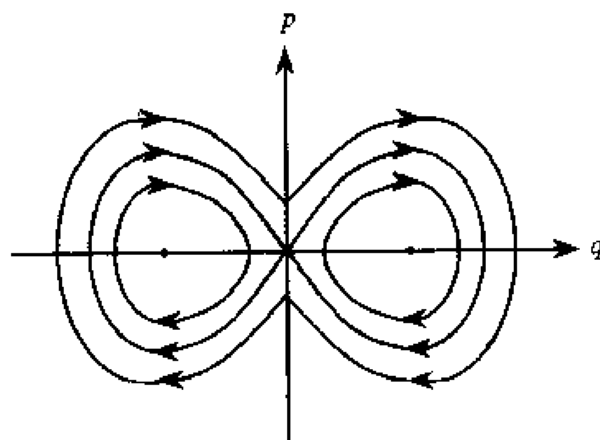


图 2.3　系统(2.7)的平面相图

从平面相图可以看出，系统(2.7)除了两条同宿轨外其余的轨道都是周期轨道。因此，除了两条同宿轨外的其他轨道，在欧几里得度量下总有$\sqrt{p^2+q^2}$是周期函数，并且当$\sqrt{p_0^2+q_0^2}$足够小时有总有$\sup\limits_{t>0}\sqrt{p^2+q^2}\geqslant 1/2$。这就说明系统(2.7)不是 Liapunov 稳定，因而不是形式稳定的，因为有限维欧几里得空间的所有度量都是等价的。

2.2　常微分方程组的奇点的 Liapunov 稳定性判别方法

谱稳定性是十分容易判断的，只须求出导算子在奇点的特征值即可。然而对于 Liapunov 稳定性的判别却没有这么简单，但也有充分性定理。

定理 2.1(Liapunov)　设 $\boldsymbol{x}_0$ 是微分方程组(2.1)的一个奇点，U 是包含 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域，而

$$V: U\subset \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$$

是连续可微函数，并且满足

① $V(\boldsymbol{x}_0)=0, V(\boldsymbol{x})>0, \forall \boldsymbol{x}\in U-\{\boldsymbol{x}_0\}$

② $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\dfrac{\partial V}{\partial x_i}\leqslant 0$，在 $U-\{\boldsymbol{x}_0\}$ 上

那么 $\boldsymbol{x}$ 是 Liapunov 稳定的。如果进一步还有

③ $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$，在 $U-\{\boldsymbol{x}_0\}$上

那么 $\boldsymbol{x}_0$ 是局部渐近稳定的，即从 U 内任一点出发的轨线当时间 $t\to+\infty$ 时都趋于奇点 $\boldsymbol{x}_0$。若 $U=\mathbf{R}^n$，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是大范围渐近稳定的。

满足条件①和②的函数 V 称为 Liapunov 函数。

这个定理的证明不在本书给出，因为在一般的常微分方程稳定性理论教材上都可以找到。

这个定理告诉我们，不用解方程组(2.1)就可以判断其奇点的 Liapunov 稳定性。这里的关键在于寻找 Liapunov 函数 V。可以证明 Liapunov 函数 V 总是存在的，但没有一般性的构造方法。Liapunov 函数只能靠观察所考虑的方程组凭经验去构造。下面给出几个例子来加以说明。

例 2.5 考虑 Leipnik-Newton 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10x_2x_3 - 0.4x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 5x_1x_3 - x_1 - 0.4x_2 \\ \dot{x}_3 = -5x_1x_2 + \alpha x_3 \end{cases}$$

该方程组描述的是：用线性反馈来稳定刚体姿态运动。在上面的方程组中，若抛弃线性项，它就是自由刚体运动方程。我们还可以证明，当 α 取一定的值时，也就是说当刚体运动受到一定外部干扰时，可能产生混沌运动。下面我们要证明适当地加以反馈，即选择适当的 α 可以消去刚体的混沌运动，使其姿态稳定下来。

显然原点(0,0,0)是该系统的一个奇点。取

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2)$$

那么 V 满足 Liapunov 定理中的条件①。一个直接计算有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = -0.4x_1^2 - 0.4x_2^2 + 3\alpha x_3^2$$

当 $\alpha \leqslant 0$ 时，$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t \leqslant 0$。因此，该系统在原点是 Liapunov 稳定的。而当 $\alpha < 0$ 时，在 $\mathbf{R}^n - \{0\}$ 上有 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t < 0$，因而该系统是大范围渐近稳定的。这也说明，不管刚体开始的运动有多么不稳定，只要选择 $\alpha < 0$，即加一个适当的扭矩，随着时间的增加，刚体转动角速度越来越小，最终将其稳定下来。

例 2.6 考虑 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(-x_1 + x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_2x_3 + \mu x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3 \end{cases}$$

它是一个用来描述长期天气预报的大气动力学模型。显然原点(0,0,0)是它的一个奇点。取

$$V = \frac{1}{2}[x_1^2 + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2)] \qquad \lambda_2 > 0$$

则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\sigma x_1^2 - \lambda_2 x_2^2 - b\lambda_2 x_3^2 + (\sigma + \mu\lambda_2) x_1 x_2$$

上式右边的二次型的系数矩阵是

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \frac{1}{2}(\sigma + \mu\lambda_2) & 0 \\ \frac{1}{2}(\sigma + \mu\lambda_2) & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -b\lambda_2 \end{pmatrix}$$

由此可知该二次型是负定的充要条件是 $\sigma > 0, \mu < 1, b > 0$,并且在这一条件下,系统是大范围渐近稳定的。

例 2.7 一般的刚体姿态稳定化方程。众所周知,自由刚体运动中,绕长轴和短轴的转动是稳定的,而绕中轴的转动是不稳定的。当刚体在一定的外部因素影响下失去稳定性后,我们希望加一个适当的扭矩使其姿态稳定下来。这种扭矩是角速度的线性函数。加扭矩后的刚体运动方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right) x_2 x_3 + k_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right) x_1 x_3 + k_2 x_2 \\ \dot{x}_3 = \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) x_1 x_2 + k_3 x_3 \end{cases}$$

这个方程组有一个奇点(0,0,0),取

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2$$

由此可以看出,当 $k_1 < 0, k_2 < 0, k_3 < 0$ 时,原点是大范围渐近稳定的。

事实上,构造适当的 Liapunov 函数是一件不容易的事情。因而,希望用别的容易的方法来判断 Liapunov 稳定性。我们知道,谱稳定是容易判断,是否在谱稳定的条件下再加适当的条件就可以判断 Liapunov 稳定性呢? 下面的定理就是在这方面的一个尝试。

定理 2.2 如果微分方程组(2.1)在奇点 $\boldsymbol{x}_0$ 的导算子 $Df(\boldsymbol{x}_0)$的所有特征值的实部都是小于零的,则该方程组在 $\boldsymbol{x}_0$ 点是局部渐近稳定的。

这个定理的证明可以在一般常微分方程书中找到,在此不再给出。这个定理虽是局部的,但对于判断奇点的导算子没有零实部特征根的情况下的奇点的

Liapunov 稳定性却是十分简单,只须计算导算子在该奇点的特征根即可。

下面是一个判断奇点的不稳定性定理。

定理 2.3 如果方程组(2.1)在奇点 x_0 的导算子 $Df(x_0)$的特征值中至少有一个特征根的实部为正,则该奇点是不稳定的。

这是因为若有一个特征根的实部为正的话,那么在对应该特征值的特征向量方向有一个不稳定解子流形,在该流形中的解随着时间的增加是远离奇点的。这一点我们将在以后加以证明。

从上面两个定理可以看出,若奇点 x_0 的导算子 $Df(x_0)$的所有特征根的实部不为零的话,其 Liapunov 稳定性与谱稳定性一致。至于有零实部特征根时,其奇点的 Liapunov 稳定性可用中心流形定理来加以判断,这在以后将会详细讲解。

下面我们再回头去看例 2.4 和例 2.6。在例 2.4 中,原点的导算子为

$$Df(0,0,0)=\begin{pmatrix}-0.4 & 1 & 0\\ -1 & -0.4 & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

其特征方程是

$$\begin{vmatrix}\lambda+0.4 & -1 & 0\\ 1 & \lambda+0.4 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-\alpha\end{vmatrix}=[(\lambda+0.4)^2+1](\lambda-\alpha)=0$$

它有三个不同的特征根 $\lambda_1=\alpha,\lambda_{2,3}=-0.4\pm \mathrm{i}$。由此可以判断,当 $\alpha<0$ 时,原点是局部渐近稳定的。

类似地可以计算在例 2.6 中的系统在原点处的导算子的特征值为 $\lambda_1=k_1$,$\lambda_2=k_2,\lambda_3=k_3$。由此可知,当 $k_1<0,k_2<0$ 和 $k_3<0$ 时,该奇点是局部渐近稳定的。

2.3 常微分方程组的奇点的形式稳定判别方法

在经典的 Hamilton 系统理论中有一个判断形式稳定性的著名定理:Lagrange-Dirichlet定理。下面给出的一个能处理广义 Hamilton 系统稳定性的方法:能量 Casimir 函数法。

定理 2.4(Lagrange-Dirichlet 定理) 设(x_0,y_0)是 Hamilton 系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial y_i}\qquad \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

的一个奇点。则当 $D^2H(x_0,y_0)$是正定或负定时,(x_0,y_0)是 Liapunov 稳定的。

这个定理的几何证明是非常简单的。因为二阶变分 $D^2H(x_0,y_0)$ 是正定(或负定)的,因此只要常数 c 足够小,等势面

$$H(x,y)=c$$

是一个封闭的曲面。

由于 $H(x,y)$ 是守恒量,那么从等势面 $H(x,y)=c$ 上任一点出发的轨线只能在等势面上跑。因此等势面把整个空间分为两个不相交的部分,在等势面内部任一点出发的解不会跑到等势面外部,面外部的解也不会跑到内部去。由此可知奇点是 Liapunov 稳定的。

用类似的方式可以证明:在有限维的情况下,形式稳定必定 Liapunov 稳定。但在无穷维情况下这一结论不一定成立。

能量 Casimir 函数法是 Lagrange-Dirichlet 方法的推广,其基础是来自几何 Poisson 结构。Lagrange-Dirichlet 定理是针对经典 Hamilton 系统的,而能量 Casimir 函数法是针对广义 Hamilton 系统的。经典 Hamilton 系统的定义可以在一般的理论力学书中找到。设经典 Hamilton 系统的 Hamilton 函数为 $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$(这里 $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 是广义位移,面 $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 是广义动量),则其对应的 Hamilton 方程为

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\qquad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{2.9}$$

如果记 $z=(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}=(q_1,\cdots,q_n;p_1,\cdots,p_n)^{\mathrm{T}}$,则方程(2.9)可以写成如下矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{J}\cdot\nabla H(z) \tag{2.10}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 为反对称矩阵,$\nabla H(z)$ 是梯度向量

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{bmatrix}$$

$$\nabla H(z)=\left(\frac{\partial H}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial q_n};\frac{\partial H}{\partial p_1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial p_n}\right)^{\mathrm{T}}$$

这里 I 为 n 阶单位矩阵。当我们把常数矩阵 J 改为函数矩阵时,可以定义广义 Hamilton 系统。

定义 2.6　常微分方程组

$$\dot{x}=f(x)\qquad x\in\mathbf{R}^n \tag{2.11}$$

称为广义 Hamilton 系统,如果存在 Hamilton 函数 $H(x)$ 及 $n\times n$ 阶反对称矩阵 $\boldsymbol{J}(x)=[J_{ij}(x)]_{n\times n}$ 使得方程组(2.11)可以写如下形式

$$\dot{x}=\boldsymbol{J}(x)\cdot\nabla H(x)=f(x) \tag{2.12}$$

并且反对称矩 $J(\boldsymbol{x})$满足下面 Jacobi 恒等式

$$\sum_{l=1}^{n}\left[J_{il}(\boldsymbol{x})\frac{\partial J_{jk}(\boldsymbol{x})}{\partial x_l}+J_{jl}(\boldsymbol{x})\frac{\partial J_{ki}(\boldsymbol{x})}{\partial x_l}+J_{kl}(\boldsymbol{x})\frac{\partial J_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_l}\right]=0$$

反对称矩阵 $\boldsymbol{J}(x)$也称为 Poisson 结构,这里 $i,j,k=1,2,\cdots,n$。

例 2.8 自由刚体运动方程是

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\left(\dfrac{1}{I_3}-\dfrac{1}{I_2}\right)x_2x_3\\ \dot{x}_2=\left(\dfrac{1}{I_1}-\dfrac{1}{I_3}\right)x_1x_3\\ \dot{x}_3=\left(\dfrac{1}{I_2}-\dfrac{1}{I_1}\right)x_1x_2\end{cases}$$

取

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}0 & -x_3 & x_2\\ x_3 & 0 & -x_1\\ -x_2 & x_1 & 0\end{pmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$是反对称的,并且满足 Jacobi 恒等式。再取

$$H(\boldsymbol{x})=H(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_1}x_1^2+\frac{1}{I_2}x_2^2+\frac{1}{I_3}x_3^2\right)$$

直接的验证可知下列 Hamilton 方程

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla H(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}0 & -x_3 & x_2\\ x_3 & 0 & -x_1\\ -x_2 & x_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{I_1}x_1\\ \dfrac{1}{I_2}x_2\\ \dfrac{1}{I_3}x_3\end{pmatrix}$$

正是自由刚体运动方程。于是自由刚体运动方程是一个广义 Hamilton 系统。

例 2.9(Heave Top) 一个重刚体绕固定点运动的方程为

$$\begin{cases}\dot{m}_1=\dfrac{I_2-I_3}{I_2I_3}m_2m_3+Mglv_2\\ \dot{m}_2=\dfrac{I_3-I_1}{I_1I_3}m_1m_3-Mglv_1\\ \dot{m}_3=\dfrac{I_1-I_2}{I_1I_2}m_1m_2\end{cases}\qquad\begin{cases}\dot{v}_1=\dfrac{1}{I_3}m_3v_2-\dfrac{1}{I_2}m_2v_3\\ \dot{v}_2=\dfrac{1}{I_1}m_1v_3-\dfrac{1}{I_2}m_3v_1\\ \dot{x}_3=\dfrac{1}{I_2}m_2v_1-\dfrac{1}{I_1}m_1v_2\end{cases}$$

取

$$J(x)=\begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 & 0 & -v_3 & v_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 & v_3 & 0 & -v_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 & -v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & -v_3 & v_2 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & -v_1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_2 & v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

及

$$H(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{I_1}+\frac{m_2^2}{I_2}+\frac{m_3^2}{I_3}\right)+Mglv_3$$

这里 $x=(m,v)$,$m=(m_1,m_2,m_3)$,$v=(v_1,v_2,v_3)$。直接计算可知下列广义 Hamilton系统

$$\begin{pmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 & 0 & -v_3 & v_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 & v_3 & 0 & -v_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 & -v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & -v_3 & v_2 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & -v_1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_2 & v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{m_1}{I_1} \\ \frac{m_2}{I_2} \\ \frac{m_3}{I_3} \\ 0 \\ 0 \\ Mgl \end{pmatrix}$$

正是 Heave Top 方程。

性质 2.1　Hamilton 函数 $H(x)$是一个守恒量。

直接计算有

$$\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=[\nabla H(x)]^{\mathrm{T}}\cdot J(x)\cdot\nabla H(x)=0$$

因为 $J(x)$是反对称矩阵。

定义 2.7　函数 $C(x)$称为 Poisson 结构 $J(x)$的 Casimir 函数(或中心),如果 $C(x)$满足下列方程

$$J(x)\cdot\nabla C(x)=0$$

显然 Casimir 函数也是该广义 Hamilton 系统的一个守恒量。

直接的计算显示 $C(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)/2$ 是例 2.7 中所给出的 Poisson 结构的 Casimir 函数。同样通过直接计算可知若 $C(x)$是 $J(x)$的一个 Casimir 函数,那么对于任意的一元函数 $\varphi(z)$,复合函数 $\varphi[C(x)]$也是 $J(x)$的 Casimir 函数。

下面求例2.8中所给出的Poisson结构的Casimir函数。由

$$J(x)\cdot\nabla C(x)=0$$

得到下列偏微分方程组

$$\begin{cases} -m_3\dfrac{\partial C}{\partial m_2}+m_2\dfrac{\partial C}{\partial m_3}-v_3\dfrac{\partial C}{\partial v_2}+v_2\dfrac{\partial C}{\partial v_3}=0 \\ m_3\dfrac{\partial C}{\partial m_1}-m_1\dfrac{\partial C}{\partial m_3}+v_3\dfrac{\partial C}{\partial v_1}-v_1\dfrac{\partial C}{\partial v_3}=0 \\ -m_2\dfrac{\partial C}{\partial m_1}+m_1\dfrac{\partial C}{\partial m_2}-v_2\dfrac{\partial C}{\partial v_1}+v_1\dfrac{\partial C}{\partial v_2}=0 \\ -v_3\dfrac{\partial C}{\partial m_2}+v_2\dfrac{\partial C}{\partial m_3}=0 \\ v_3\dfrac{\partial C}{\partial m_1}-v_1\dfrac{\partial C}{\partial m_3}=0 \\ -v_2\dfrac{\partial C}{\partial m_1}+v_1\dfrac{\partial C}{\partial m_2}=0 \end{cases}$$

由后三个方程有

$$C(x)=C(\boldsymbol{m},\boldsymbol{v})=\Psi(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=\Psi(m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3,v_1,v_2,v_3)$$

以此代入前三个方程得

$$\begin{cases} -v_3\dfrac{\partial\Psi}{\partial v_2}+v_2\dfrac{\partial\Psi}{\partial v_3}=0 \\ v_3\dfrac{\partial\Psi}{\partial v_1}-v_1\dfrac{\partial\Psi}{\partial v_3}=0 \\ -v_2\dfrac{\partial\Psi}{\partial v_1}+v_1\dfrac{\partial\Psi}{\partial v_2}=0 \end{cases}$$

由此有

$$\Psi=\varphi(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{v},|\boldsymbol{v}|^2)=\varphi(m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3,v_1^2+v_2^2+v_3^2)$$

于是获得的Casimir函数为

$$C(x)=C(\boldsymbol{m},\boldsymbol{v})=\varphi(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{v},|\boldsymbol{v}|^2)$$

Casimir函数还有一个性质：Hamilton函数加上任何Casimir函数仍可作原系统的Hamilton函数，因为以这种Hamilton函数算出来的Hamilton方程与原来的Hamilton方程完全一样。

下面我们来介绍能量Casimir函数法，并解决自由刚体运动的稳定性问题。

能量Casimir函数法描述如下：

① 构造适当的Poisson结构$J(x)$及Hamilton函数$H(x)$，使所考虑的系统成为广义Hamilton系统：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla H(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

② 寻找一族守恒量，即找出函数 $C:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}C(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.12)}=0$$

寻找这种函数的一种有效方法就是找 Poisson 结构的 Casimir 函数；

③ 选择守恒量 $C(\boldsymbol{x})$，使得 $H+C$ 对系统(2.12)的奇点 $\boldsymbol{x}_0$ 有 $D(H+C)(\boldsymbol{x}_0)=0$；

④ 计算 $D^2(H+C)(\boldsymbol{x}_0)$的正定性。

前面我们已经把自由刚体运动方程化成了广义 Hamilton 系统，下面来证明一个著名定理。

刚体稳定性定理：在自由刚体运动中，绕长轴和短轴的转动是稳定的，而绕中轴的转动是不稳定的。

下面用能量 Casimir 函数法来证明这个定理。

第一步：已经在例 2.8 中完成。

第二步：对于任意函数 $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$C_\varphi(\boldsymbol{x})=\varphi\left[\frac{1}{2}(m_1^2+m_2^2+m_3^2)\right]$$

第三步：求一阶变分，即要寻找一个 Casimir 函数 C_φ 使得 $H_C=H+C_\varphi$ 以指定奇点为其临界点：$DH_C(\boldsymbol{x}_0)=0$。取

$$H_C(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_1}x_1^2+\frac{1}{I_2}x_2^2+\frac{1}{I_3}x_3^2\right)+\varphi\left[\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\right]$$

一个直接的计算得

$$\begin{aligned}DH_C(\boldsymbol{x})&=\left(\frac{\partial H_C}{\partial x_1},\frac{\partial H_C}{\partial x_2},\frac{\partial H_C}{\partial x_3}\right)\\&=\left(x_1\left(\frac{1}{I_1}+\varphi'\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}|^2\right)\right),x_2\left(\frac{1}{I_2}+\varphi'\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}|^2\right)\right),\right.\\&\qquad\left.x_3\left(\frac{1}{I_3}+\varphi'\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}|^2\right)\right)\right)\end{aligned}$$

这里 $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$。

从刚体运动方程可知该方程组奇点为$(x_1,0,0)$，$(0,x_2,0)$及$(0,0,x_3)$。因此，三根坐标轴上的每一点都是奇点。从前面已经知道，自由刚体运动方程的解必须满足能量守恒方程 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=c^2$。以 $x_1=cy_1$，$x_2=cy_2$ 和 $x_3=cy_3$ 代入这个能量守恒方程得 $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$。经过这样的正规化处理后，只须考虑奇

点(1,0,0),(0,1,0)及(0,0,1)的稳定性即可。不失一般性,我们只考虑奇点 $\boldsymbol{x}_0 = (1,0,0)$。显然

$$DH_C(\boldsymbol{x}_0) = \left(\frac{1}{I_1} + \varphi'_1\left(\frac{1}{2}\right),0,0\right)$$

由 $DH_C(\boldsymbol{x}_0) = 0$,必有

$$\varphi'_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{I_1}$$

第四步:计算 $D^2H_C(\boldsymbol{x}_0)$的正定性和负定性。直接计算有

$$D^2H_C(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_C}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 H_C}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 H_C}{\partial x_1 \partial x_3}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial^2 H_C}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 H_C}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 H_C}{\partial x_2 \partial x_3}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial^2 H_C}{\partial x_3 \partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 H_C}{\partial x_3 \partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial^2 H_C}{\partial x_3^2}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi''_1\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \end{pmatrix}$$

该矩阵为正定的充要条件是

$$\varphi''\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \qquad I_1 > I_2 \qquad I_1 > I_3$$

取

$$\varphi(y) = -\frac{1}{I_1}y + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

则 $D^2H_C(\boldsymbol{x}_0)$为正定矩阵。由此可知,刚体绕长轴(即最大惯量 I_1 对应的轴)的转动是稳定的。

类似地,该矩阵为负定的充要条件是

$$\varphi''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \qquad I_1 < I_2 \qquad I_1 < I_3$$

取

$$\varphi(y) = -\frac{1}{I_1}y - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

则 $D^2H_C(\boldsymbol{x}_0)$是负定的。由此可知,刚体绕短轴(即最小惯量对应的轴)的转动

是稳定的。

该矩为不定时,必有 $I_2 < I_1 < I_3$ 或 $I_3 < I_1 < I_2$。此时用谱分析的方法可以证明,绕中轴的转动是不稳定的。

Lagrange Top**运动稳定性定理**:如果 $m_3 > 2\sqrt{MglI_1}$,那么垂直自旋 Lagrange Top运动($I_1 = I_2 > I_3$)是非线性稳定的。

事实上第一步我们已经在例 2.9 中已完成。

第二步:对于任意二维函数 $\varphi:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$H_c(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{v}, |\boldsymbol{v}|^2)$$

第三步:求一阶变分。我们只考虑 Lagrange Top垂直自旋。即只考虑奇点 $\boldsymbol{x}_0 = (\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{v}_0)(\boldsymbol{m}_0 = (0,0,m_3), \boldsymbol{v}_0 = (0,0,1))$的稳定性。显然

$$DH_c(\boldsymbol{x}_0) = \left(\frac{\partial H_c}{\partial m_1}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial H_c}{\partial m_2}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial H_c}{\partial m_3}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial H_c}{\partial v_1}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial H_c}{\partial v_2}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial H_c}{\partial v_3}(\boldsymbol{x}_0)\right)$$

$$= \left(0, 0, \frac{m_3}{I_3} + \partial_1\varphi(m_3,1), 0, 0, Mgl + m_3\partial_1\varphi(m_3,1) + 2\partial_2\varphi(m_3,1)\right)$$

这里

$$\partial_1\varphi(u,v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \qquad \partial_2\varphi(u,v) = \frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

于是 $DH_c(\boldsymbol{x}_0) = 0$ 的充要条件是

$$\begin{cases} \dfrac{m_3}{I_3} + \partial_1\varphi(m_3,1) = 0 \\ Mgl + m_3\partial_1\varphi(m_3,1) + 2\partial_2\varphi(m_3,1) = 0 \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} \partial_1\varphi(m_3,1) = -\dfrac{m_3}{I_3} \\ \partial_2\varphi(m_3,1) = -\dfrac{Mgl}{2} + \dfrac{m_3^2}{2I_3} \end{cases} \tag{2.13}$$

第四步:计算 H_c 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的 Hesse 矩阵 $D^2H_c(\boldsymbol{x}_0)$的正定性。记 $a = \partial_1\varphi(m_3,1), b = \partial_2\varphi(m_3,1), c = \partial_1^2\varphi(m_3,1), d = \partial_2^2\varphi(m_3,1), e = \partial_{12}^2\varphi(m_3,1)$,一个直接计算有

$$D^2 H_c(x_0)=\begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3}+c & 0 & 0 & a+m_3c+2e \\ a & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & a+m_3c+2e & 0 & 0 & 2b+4m_3e+m_3^2c+4d \end{pmatrix}$$

众所周知，$D^2H_c(x_0)$是正定的充要条件是它的所有主子行列式为正。它的6个主子行列式的值分别为

$$A_{11}=\frac{1}{I_1}\quad A_{22}=\frac{1}{I_1^2}\quad A_{33}=\frac{1}{I_1^2}\left(\frac{1}{I_3}+c\right)$$

$$A_{44}=\frac{1}{I_1}\left(\frac{1}{I_3}+c\right)\left(\frac{2b}{I_1}-a^2\right)\quad A_{55}=\left(\frac{1}{I_3}+c\right)\left(\frac{2b}{I_1}-a^2\right)^2$$

$$\begin{aligned} A_{66}&=|D^2H_c(x_0)|\\ &=\left(\frac{2b}{I_1}-a^2\right)^2\left[\left(\frac{1}{I_3}+c\right)(2b+4m_3e+m_3^2c+4d)-(a+m_3c+2e)^2\right] \end{aligned}$$

由此可以看出，$D^2H(x_0)$为正定的充要条件为

$$\begin{cases} \frac{1}{I_3}+c>0 \\ \frac{2b}{I_1}-a^2>0 \\ \left(\frac{1}{I_3}+c\right)(2b+4m_3e+m_3^2c+4d)-(a+m_3c+2e)^2>0 \end{cases}$$

现在取 φ 满足下列条件

$$\begin{cases} c=\partial_1^2\varphi(m_3,1)=0 \\ e=\partial_{12}^2\varphi(m_3,1)=0 \\ d=\partial_2^2\varphi(m_3,1)>0 \end{cases}$$

那么上面的不等式变为

$$\begin{cases} \frac{2b}{I_1}-a^2>0 \\ \frac{2b}{I_3}-a^2>0 \end{cases}$$

在条件 $I_1=I_2>I_3$ 的条件下，上面不等式组变为

$$\frac{2b}{I_1} - a^2 > 0$$

以条件(2.13)代入上述不等式得

$$I_1 m_3^2\left(\frac{1}{I_3}\right)^2 - m_3^2 \frac{1}{I_3} + Mgl < 0$$

上面的不等式是关于 $1/I_3$ 的二次多项式，上述不等式成立的充要条件是

$$m_3^4 - 4MglI_1 m_3^2 > 0$$

即

$$m_3 > 2\sqrt{MglI_1}$$

于是定理证毕。

由此也可以看出，能量 Casimir 方法是证明非线性稳定性的一个有效方法。事实上，能量 Casimir 方法的诱人之处并不在此，而是证明无穷维系统的非线性稳定性(如流体的稳定性)。由于本书篇幅有限，我们不在此介绍能量 Casimir 方法在这方面的应用。

能量 Casimir 函数方法的关键在于把一个动力系统实现为广义 Hamilton 系统，传统上是通过对李群或李代数约化得到。对于三维动力系统，如果知道它一个首次积分和其散度为零，那么我们总可以将其实现为一个广义 Hamilton 系统，并且可以构造出它的第二次首次积分。

能量 Casimir 函数方法的另一个关键在于构造足够多的函数无关的首次积分。求 Poisson 结构的 Casimir 函数是一种方法。事实上，Casimir 函数以及 Hamilton 函数并不是系统的所有首次积分。例如，Heave Top 方程总有 3 个首次积分，而在某些条件下有 5 个首次积分。

思考题

1. 试构造一个谱稳定而线性不稳定的二维或高于二维的系统。
2. 试构造一个线性稳定但非线性不稳定的系统。
3. 考虑谐振子方程

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{k}{m}(x + x^3) \end{cases}$$

试讨论该系统在原点的非线性稳定性。

4. 考虑 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \quad \sigma > 0 \quad \beta > 0 \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}$$

取 $V = (x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2)/2$,用此函数找出该系统在原点(0,0,0)是大范围渐近稳定的条件,试问这些条件是必要的吗?

5. 考虑下列带有附加装置的刚体运动方程

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2}\right) m_2 m_3 - \frac{1}{\lambda_2} m_2 \\ \dot{m}_2 = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_3}\right) m_1 m_3 + \frac{1}{\lambda_1} m_1 \\ \dot{m}_3 = \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) m_1 m_2 \end{cases} \tag{2.14}$$

① 证明

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 - l & m_2 \\ m_3 + l & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix}$$

是一个 Poisson 结构;

② 如果取

$$H(\boldsymbol{m}) = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{\lambda_1} + \frac{m_2^2}{\lambda_2} + \frac{m_3^2}{\lambda_3}\right)$$

那么下列 Hamilton 方程

$$\dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{m}) \cdot \nabla H(\boldsymbol{m})$$

正是方程组(2.14),这就说明(2.14)是广义 Hamilton 系统;

③ 研究该刚体运动的非线性稳定性。

6. 用谱分析的方法证明当 $m_3 < 2\sqrt{MglI_1}$ 时,Lagrange Top 的垂直自旋是线性不稳定的,因而是 Liapunov 不稳定的。

第三章 中心流形定理

在上一章我们已经看到，如果一个奇点的导算子的所有特征根的实部都不为零，其 Liapunov 稳定性可以完全确定。然而，当特征值中有零实部的特征根时，我们不能用谱稳定性来判断 Liapunov 稳定性。我们下面的目的就是要判断奇点的导算子有零实部特征值时的 Liapunov 稳定性。虽然没有判定定理，但将给出一个判断方法。这个方法的基础是中心流形定理。中心流形定理在线性微分方程组情况十分简单，这是因为导算子的特征值对应的特征向量将解空间分为三部分：一部分是所有实部大于零的特征值所对应特征向量构成的特征解子空间，从这个子空间中任一点出发的解还在这一个子空间中，并且当时间趋于无穷时，轨线远离奇点，因而也称这个子空间为扩张子空间；一部分是由所有实部为负的特征根所对应的所有特征向量构成的特征子空间，在这个子空间中任一点出发的轨线当时间趋于无穷时，趋于奇点，因而称为收缩子空间；最后一部分是所有零实部的特征根对应的特征向量构成的子空间，从这个解子空间中的点出发的轨线是周期轨。现在我们要问的问题是：上面这种分解能否推广到非线性系统，这就是中心流形定理要回答的问题。在本章，为了更清楚地看出奇点的性质，我们将画出奇点附近的相图，即奇点附近的轨线分布图。对于平面和三维系统，可以直接画出相图。然而，对于高维系统只能抽象地画出相图。

3.1 线性系统解不变子空间

下面从一个例子开始研究线性系统解空间的结构。

例 3.1 考虑 $\mathbf{R}^3$ 上的线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + 6x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 5x_2 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 6x_2 + x_3 \end{cases}$$

显然原点是它的唯一奇点。在奇点的导算子就是该线性方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

它有三个特征根：$\lambda_1 = -2$ 是单重根，$\lambda_{2,3} = 1$ 是二重根。一个直接计算可知对应

于 $\lambda_1 = -2$ 的特征向量是

$$e_1 = (-1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

而对应于二重根 $\lambda_{2,3} = 1$ 的特征向量是

$$e_2 = (-2,1,0)^{\mathrm{T}} \qquad e_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

记

$$E^s = \mathrm{span}\{e_1\} = \{\lambda e_1 \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$$

$$E^u = \mathrm{span}\{e_2, e_3\} = \{\alpha e_2 + \beta e_3 \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$$

那么该系统的解空间可分解为 E^s 与 E^u 的直和，即 $\mathbf{R}^3 = E^s \oplus E^u$。

下面通过计算来证明 E^s 及 E^u 是该线性系统的两个解不变子空间，即从 E^s 中点出发的轨线只能在 E^s 中运动，从 E^u 中点出发的轨线只能在 E^u 中运动。对于线性微分方程组，我们可求出它的一般解。令

$$T = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则有

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$$

于是

$$A = TJT^{-1}$$

那么

$$\dot{X} = AX = TJT^{-1}X$$

由此有

$$T^{-1}\dot{X} = JT^{-1}X$$

令 $Y = T^{-1}X$，那么有

$$\dot{Y} = JY$$

上式可写为

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

因此

$$y_1 = c_1 e^{-2t} \qquad y_2 = c_2 e^t \qquad y_3 = c_3 e^t$$

于是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -c_1 e^{-2t} - 2c_2 e^t \\ x_2 = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t \\ x_3 = c_1 e^{-2t} + c_3 e^t \end{cases}$$

下面我们证明 E^s 是不变解子空间。任取 E^s 中一点 $\boldsymbol{x}_0$，则 $\boldsymbol{x}_0$ 可表为

$$\boldsymbol{x}_0 = \eta \boldsymbol{e}_1 = (-\eta, \eta, \eta)^{\mathrm{T}}$$

则在 $t=0$ 时过 $\boldsymbol{x}_0$ 的解应满足

$$\begin{cases} x_1(0) = -c_1 - 2c_2 = -\eta \\ x_2(0) = c_1 + c_2 = \eta \\ x_3(0) = c_1 + c_3 = \eta \end{cases}$$

由此有 $c_1 = -\eta, c_2 = c_3 = 0$。从而在 $t=0$ 时过 $\boldsymbol{x}_0$ 点的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta e^{-2t} \\ \eta e^{-2t} \\ \eta e^{-2t} \end{pmatrix} = \eta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \eta e^{-2t} \boldsymbol{e}_1 \in E^S$$

因而 E^S 是该线性系统解的不变子空间。

最后，我们来证明 E^u 也是不变解子空间。取 E^u 中任一点 $\boldsymbol{x}_0$，则 $\boldsymbol{x}_0$ 可表为

$$\boldsymbol{x}_0 = \eta_2 \boldsymbol{e}_2 + \eta_3 \boldsymbol{e}_3 = (-2\eta_2, \eta_2, \eta_3)^{\mathrm{T}}$$

容易计算在 $t=0$ 过 $\boldsymbol{x}_0$ 点的解是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\eta_2 e^t \\ \eta_2 e^t \\ \eta_3 e^t \end{pmatrix} = \eta_2 e^t \boldsymbol{e}_2 + \eta_3 e^t \boldsymbol{e}_3 \in E^u$$

因而 E^u 是解不变子空间。从上面给出的解可以看出从 E^s 中任一点出发的解当 $t \to +\infty$ 时，趋于原点，因 E^s 是收缩的。而对 E^u 中的解，当 $t \to +\infty$，远离原点，因而是扩张的，用一个图画出来如图 3.1 所示。因而原点是鞍点，这在绪论中已讲到。

有了上面的例子后，我们就提出一个这样的问题：是否一般的 n 维线性齐次系统都可以将解空间作一个类似的划分呢？下面就这样的系统作一个探讨。

考虑一般 n 维线性系统

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \tag{3.1}$$

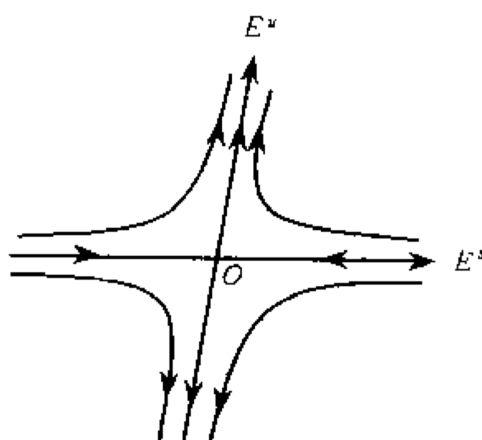


图 3.1 奇点 O 是鞍点

用 $\sigma(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值。那么 $\sigma(\boldsymbol{A})$ 可分为三部分，一部分是特征根实部大于零的所有特征根组成，一部分是由所有负实部的特征根组成，最后一部分是由零实部特征根构成，即

$$\sigma_u(\boldsymbol{A}) = \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A}) \mid \mathrm{Re}\lambda > 0\}$$
$$\sigma_s(\boldsymbol{A}) = \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A}) \mid \mathrm{Re}\lambda < 0\}$$
$$\sigma_c(\boldsymbol{A}) = \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A}) \mid \mathrm{Re}\lambda = 0\}$$

用 E^u、E^s、E^c 分别表示对应于上述三类特征值所对应的特征向量所张成的特征子空间。则 $\mathbf{R}^n$ 可分解为

$$\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

现在要问：E^s、E^u、E^c 是否为系统(3.1)的解的不变子空间？为了回答这个问题，定义投影映射

$$\pi_s: \mathbf{R}^n \to E^s \qquad \pi_u: \mathbf{R}^n \to E^u \qquad \pi_c: \mathbf{R}^n \to E^c$$

上述投影的零空间分别为

$$\mathrm{kernel}(\pi_s) = E^{cu} = E^c \oplus E^u$$

$$\mathrm{kernel}(\pi_u) = E^{cs} = E^c \oplus E^s$$

$$\mathrm{kernel}(\pi_c) = E^{us} = E^u \oplus E^s$$

并且显然有

$$\pi_s \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \pi_s \qquad \pi_u \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \pi_u \qquad \pi_c \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \pi_c$$

下面来证明 E^s 是系统(3.1)的不变子空间。系统(3.1)在 $t=0$ 时过 $\boldsymbol{x}_0$ 的解可表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \cdot \boldsymbol{x}_0$$

这里

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots$$

容易验证

$$\pi_s\cdot e^{At}=e^{At}\cdot\pi_s$$

于是当 $x_0\in E^s$，有

$$x_0=\pi_s\cdot x_0$$

$$x(t)=e^{At}\cdot x_0=e^{At}\cdot\pi_s\cdot x_0=\pi_s(e^{At}\cdot x_0)\in E^s$$

因此 E^s 是不变子空间。同理可证 E^u 及 E^c 都是系统(3.1)的不变子空间(如图 3.2)。

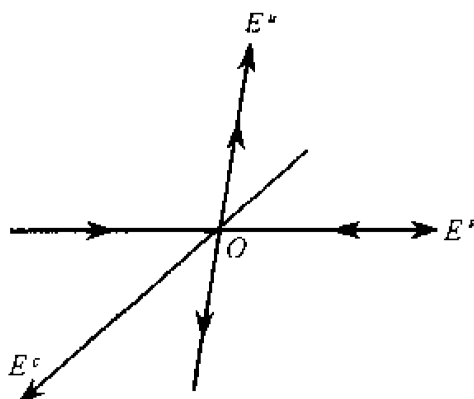


图 3.2　$\mathbf{R}^n$ 在解空间上的分解

由分解式 $\mathbf{R}^n=E^s\oplus E^u\oplus E^c$ 以及应用上一章的定理有下列结论：

① $E^s=\mathbf{R}^n$，$E^u=E^c=\phi$，系统(3.1)在原点是渐近稳定的，原点 O 是汇。

② $E^c=\phi$，$E^u\neq\phi$，$E^s\neq\phi$，系统(3.1)在原点是不稳定的，原点 O 是鞍点。

③ $E^s=E^c=\phi$，$E^u=\mathbf{R}^n$，原点 O 是不稳定奇点，并且是源。

④ $E^u=E^c=\phi$，$E^s=\mathbf{R}^n$，原点 O 是中心，即所有的都是周期解。

⑤ $E^s\neq\phi$，$E^u\neq\phi$，$E^c\neq\phi$，原点 O 是不稳定的，但在中心子空间上轨线的走向未知。

⑥ $E^u=\phi$，$E^s\neq\phi$，$E^c\neq\phi$，原点 O 的稳定性和轨线的走向都是未知的。

⑦ $E^s=\phi$，$E^c\neq\phi$，$E^u\neq\phi$，原点是不稳定的，但轨线的走向未知。

3.2　不变流形及中心流形定理

在线性系统情况下，奇点的导算子的所有正实部特征根对应的特征向量张成一个解子空间，但在非线性系统情况下并非如此。第一，在非线性系统的解空间里没有代数运算；第二，一般不存在这样的整体空间。因此，在非线性系统里

将用局部不变流形的概念来代替不变子空间概念。

定义 3.1 $\mathbf{R}^n$ 中的一个子集 S 称为微分方程组 $\dot{x}=f(x)$ 的一个不变子流形，如果对于任何 $x_0 \in S$，在 $t=0$ 时，该方程组过 x_0 点的解 $x(t,0,x_0)\in S$（对所有可能的时间 $t\in\mathbf{R}$）。

从几何上来看（如图 3.3），S 是不变子流形⇔从 S 上任一点出发的轨线不会跑到 S 的外面去。

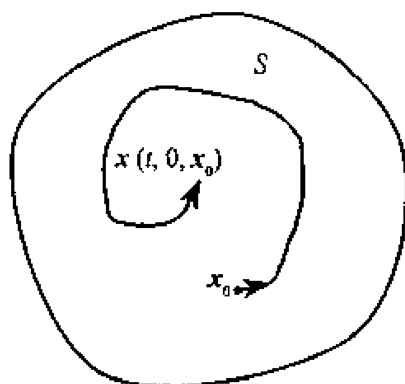


图 3.3 从 S 中的点出发的轨线永远停留在 S 中

例 3.2 考虑二维 Lotka-Volterra 方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1)\\ \dot{x}_2 = x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_2)\end{cases}$$

定义 $\mathbf{R}^2$ 上三个子集

$$S_{x_1} = \{(x_1,0) \mid x_1 \in \mathbf{R}\}\text{——}x_1\text{ 轴}$$

$$S_{x_2} = \{(0,x_2) \mid x_2 \in \mathbf{R}\}\text{——}x_2\text{ 轴}$$

$$S = \{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \mid x_1>0, x_2>0\}\text{——第一象限}$$

下面证明 S_{x_1}、S_{x_2}、S 都是 Lotka-Volterra 方程组的不变子流形。

显然微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1(a_{11}x_1 + a_1)\\ x_2 = 0\end{cases}$$

的解仍是 Lotka-Volterra 方程组的解。而该方程组解在 x_2 轴的分量为零，因而从 x_1 轴上的点出发的轨线始终停留在 x_1 轴上，即 S_{x_1} 是 Lotka-Volterra 方程组的一个不变子流形。同理可证，S_{x_2} 是 Lotka-Volterra 系统的一个不变子流形。

注意微分方程的任意两个解是不相交的，因而从第一象限的点出发的轨线不会越过坐标轴跑到其他象限去，因而第一象限也是 Lotka-Volterra 方程组的不

变子流形(如图 3.4)。

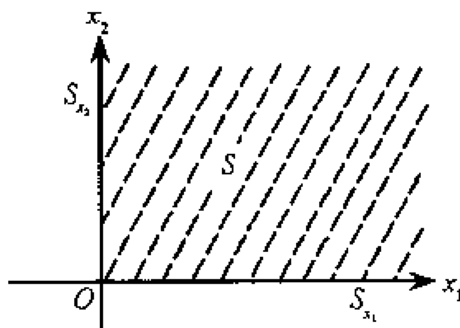


图 3.4　斜线部分 S 是不变子流形

例 3.3　考虑平面系统

$$\begin{cases}\dot{x} = -y + x[u-(x^2+y^2)]\\ \dot{y} = x + y[u-(x^2+y^2)]\end{cases}$$

这里 $u>0$。显然圆周 $x^2+y^2=u$ 是该方程组的一个解。因而该圆周、圆周的内部以及圆周的外部都是该方程组的不变子流形。

下面考虑一般的非线性系统(2.1)。

设 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组(2.1)的一个奇点,令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$,则有

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}_0) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{y} + R(y) \tag{3.2}$$

这里 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}) = O(|\boldsymbol{y}|^2)$,记 $\boldsymbol{A} = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$,那么方程(3.2)可写为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}) \tag{3.3}$$

由线性代数知识可知存在矩阵 $\boldsymbol{T}$,使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_s & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_u & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{A}_c\end{pmatrix}$$

这里 $\boldsymbol{A}_s$ 是 $s\times s$ 阶矩阵,并且其所有特征根的实部都小于零;$\boldsymbol{A}_u$ 是 $u\times u$ 阶矩阵,$\boldsymbol{A}_u$ 所有特征值的实部都大于零;而 $\boldsymbol{A}_c$ 是 $c\times c$ 阶矩阵,其所有特征根的实部都等于零。这里还有 $s+u+c=n$。于是方程(3.3)可改写为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = T\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_s & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_u & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{A}_c\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y})$$

即有

$$\boldsymbol{T}^{-1}\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_s & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_u & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{A}_c\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y})$$

令 $T^{-1}y=(u,v,w)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{s}\times\mathbf{R}^{u}\times\mathbf{R}^{c}=\mathbf{R}^{n}$，那么上面的方程可化为

$$\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_s & 0 & 0\\ 0 & A_u & 0\\ 0 & 0 & A_c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}R_s(u,v,w)\\ R_u(u,v,w)\\ R_c(u,v,w)\end{pmatrix}$$

将上面方程写成分量形式为

$$\begin{cases}\dot{u}=A_s u+R_s(u,v,w)\\ \dot{v}=A_u v+R_u(u,v,w)\\ \dot{w}=A_c w+R_c(u,v,w)\end{cases}\tag{3.4}$$

因此，对于非线性系统(2.1)，在其奇点 x_0 附近，可经过适当的线性变换将其化为标准形式(3.4)，并且其奇点 x_0 变为方程组(3.4)的原点$(u_0,v_0,w_0)=(0,0,0)$，方程组(3.4)在原点的线性化算子的特征值由各分块矩来决定。

下面给出一个重要定理：中心流形定理。这个定理的证明很长，在这里不给出。

定理 3.1(局部不变流形和中心流形定理) 设 A_s、A_u、A_c 的各自的特征值对应的特征向量张成的特征子空间分别为 E^s、E^u、E^c，那么存在奇点$(u_0,v_0,w_0)=(0,0,0)$的邻域 U，及 U 中的 C^r－流形 $W^s_{loc}(0)$、$W^u_{loc}(0)$与 $W^c_{loc}(0)$满足以下条件：

① 在奇点处，它们分别与 E^s、E^u 和 E^c 相切；

② 它们都是式(3.4)的解的不变子流形；

③ 式(3.4)的解在 $W^s_{loc}(0)$上是压缩的，而在 $W^u_{loc}(0)$上是扩张的；

④ $W^s_{loc}(0)$及 $W^u_{loc}(0)$是唯一的，但 $W^c_{loc}(0)$不一定是唯一的；

⑤ $\dim W^s_{loc}(0)=\dim E^s$，$\dim W^u_{loc}(0)=\dim E^u$，$\dim W^c_{loc}(0)=\dim E^c$。

这个定理的几何解析如图 3.5 所示。

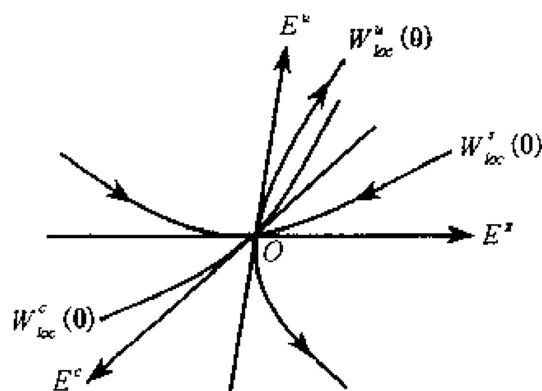


图 3.5 解空间在奇点附近的分解

注：可以证明，方程组(3.4)的解在奇点 O 附近拓扑等价于下列方程组

$$\dot{\xi}=g(\xi),\quad \dot{\eta}=-\eta,\quad \dot{\rho}=\rho$$

的解，$(\xi,\eta,\rho)\in W_{loc}^{c}(0)\times W_{loc}^{s}(0)\times W_{loc}^{u}(0)$。因此，中心流形定理起到约化维数的作用。

3.3　中心流形的计算

从前面可以看出，奇点附近的轨线在稳定流形 $W_{loc}^{s}(0)$ 和不稳定流形 $W_{loc}^{u}(0)$ 上的走向是清楚的，而在中心流形 $W_{loc}^{c}(0)$ 上是不知道的。因此将中心流形 $W_{loc}^{c}(0)$ 计算出来是十分重要的。虽然很难在整体表示出来，但在局部上还是可以在奇点附近近似地表示出来。事实上，我们将在下面给出计算所有不变流形的方法，而不只是中心流形 $W_{loc}^{c}(0)$。

下面以 $W_{loc}^{s}(0)$ 为例。由中心流形定理可知，$W_{loc}^{s}(0)$ 与 E^{s} 相切于原点 O，并且与 E^{s} 维数相等，抽象地画出原点 O 附近稳定流形 $W_{loc}^{s}(0)$ 的图像如图 3.6 所示。

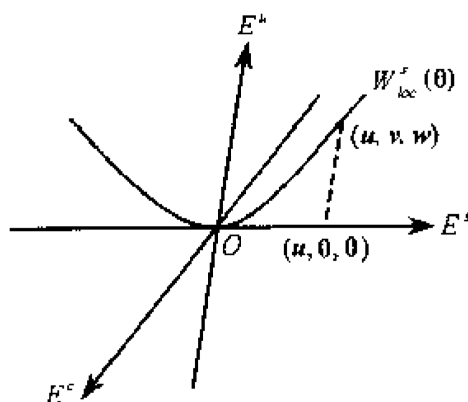


图 3.6　$W_{loc}^{s}(0)$ 中的点在 E^{s} 中的投影

从图中可以看出 v 和 w 可写为 u 的函数，即有

$$\begin{aligned}W_{loc}^{s}(0)=\{(u,v,w)\in \mathbf{R}^{s}\times\mathbf{R}^{u}\times\mathbf{R}^{c}\mid v=h_{v}^{s}(u),\\ w=h_{w}^{s}(u),h_{v}^{s}(0)=0,h_{w}^{s}(0)=0,\\ Dh_{v}^{s}(0)=0,Dh_{w}^{s}(0)=0,|u|\text{充分小}\}\end{aligned}$$

这里 $h_{v}^{s}(0)=0,h_{w}^{s}(0)=0$ 是稳定流形 $W_{loc}^{s}(0)$ 过原点的条件，面 $Dh_{v}^{s}(0)=0$，$Dh_{w}^{s}(0)=0$ 是稳定流形 $W_{loc}^{s}(0)$ 在原点与 E^{s} 相切的条件。同理

$$\begin{aligned}W_{loc}^{u}(0)=\{(u,v,w)\in \mathbf{R}^{s}\times\mathbf{R}^{u}\times\mathbf{R}^{c}\mid u=h_{u}^{u}(v),\\ w=h_{w}^{u}(v),h_{u}^{u}(0)=0,h_{w}^{u}(0)=0,\end{aligned}$$

$$Dh_u^u(0)=0, Dh_w^u(0)=0, |v|\text{充分小}\}$$

$$W_{loc}^c(0)=\{(u,v,w)\in\mathbf{R}^s\times\mathbf{R}^u\times\mathbf{R}^c \mid u=h_u^c(w),$$
$$v=h_v^c(w), h_u^c(0)=0, h_v^c(0)=0,$$
$$Dh_u^c(0)=0, Dh_v^c(0)=0, |w|\text{充分小}\}$$

这里 $h_v^s(u)$、$h_w^s(u)$、$h_u^u(v)$、$h_w^u(v)$、$h_u^c(w)$与 $h_v^c(w)$都是 C^r 函数。

例 3.4 考虑平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=x\\ \dot{y}=-y+x^2\end{cases}\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2$$

该系统有唯一奇点 $O(0,0)$。奇点 O 的导算子为

$$Df(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

其特征值是 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$。一个直接计算对应于 $\lambda=1$ 的特征向量是

$$e_1=(1,0)^T$$

于是

$$E^u=\text{span}\{e_1\}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y=0\}\text{——}x\text{ 轴}$$

同理有

$$E^s=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x=0\}\text{——}y\text{ 轴}$$

下面来计算不变子流形 $W_{loc}^s(0,0)$及 $W_{loc}^u(0,0)$:

$$W_{loc}^u(0,0)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y=\varphi(x), \varphi(0)=\varphi'(0)=0, |y|\text{充分小}\}$$

$$W_{loc}^s(0,0)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y=\Psi(x), \Psi(0)=\Psi'(0)=0, |x|\text{充分小}\}$$

显然该系统有一个首次积分

$$xy-\frac{x^3}{3}=C$$

这里 C 是任意常数。

① 求 $W_{loc}^u(0,0)$,以 $y=\varphi(x)$代入首次积分,得

$$x\varphi(x)-\frac{x^3}{3}=C$$

由于 $W_{loc}^u(0,0)$过原点,于是 $C=0$,从而

$$x\left[\varphi(x)-\frac{x^2}{3}\right]=0$$

面 x 是变量,于是 $\varphi(x)=x^2/3$,从而

$$W_{loc}^u(0,0)=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y=\frac{x^2}{3}\right\}$$

② 求 $W_{loc}^s(0,0)$,以 $x=\Psi(y)$代入首次积分,得

$$y\Psi(y)-\frac{1}{2}[\Psi(y)]^3=C$$

因 $\Psi(0)=0$,得 $C=0$,从而

$$\Psi(y)\left\{y-\frac{1}{3}[\Psi(y)]^2\right\}=0$$

于是 $\Psi(y)=0$ 或 $y=\Psi^2(y)/3$。但 $W^s_{loc}(0,0)$与 y 轴相切,从而 $W^s_{loc}(0,0)=\{(x,y)\mid x=0\}$——$y$ 轴。容易画出该系统的相图如图 3.7 所示。

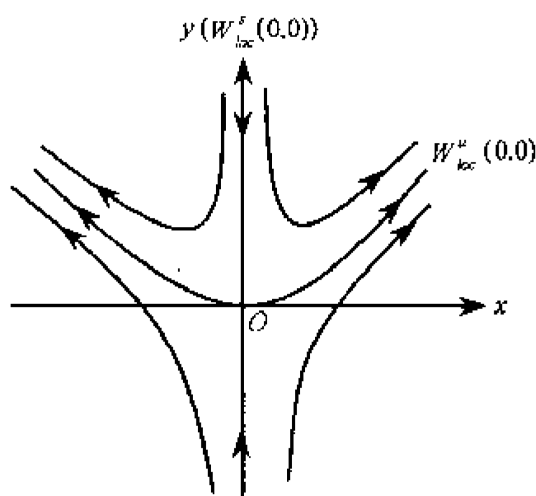


图 3.7　奇点 O 附近的轨线的走向

由此可知,知道不变子流形后,我们可以画出奇点附近的相图。事实上,如果只考虑奇点的稳定性的话,只须确定中心流形 $W^c_{loc}(\mathbf{0})$中的轨线走向即可。从中心流定理可知:

① $E^s=\mathbf{R}^n$, $E^u=E^c=\phi$,奇点是局部渐近稳定的;

② $E^u\neq\phi$,奇点是不稳定的;

③ $E^u=\phi$, $E^c\neq\phi$,这时奇点的稳定性不知道。

因此,下面我们考虑在 $\mathbf{R}^n=E^s\oplus E^c$ 的情况下,计算 $W^c_{loc}(\mathbf{0})$。我们先画一个几何图形,如图 3.8 所示。

在这种情况下,方程组(3.4)化为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}_s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\\ \dot{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{w}+\boldsymbol{R}_c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\end{cases}\tag{3.5}$$

在奇点附近将 $W^c_{loc}(\mathbf{0})$用函数表示出来

$$W^c_{loc}(\mathbf{0})=\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\in\mathbf{R}^s\times\mathbf{R}^c\mid \boldsymbol{u}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{h}(\mathbf{0})=\mathbf{0},D\boldsymbol{h}(\mathbf{0})=\mathbf{0},|\boldsymbol{w}|\text{充分小}\}$$

以 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w})$代入式(3.5)的第二方程得

$$\dot{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{w}+\boldsymbol{R}_c(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w})\qquad \boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^c\tag{3.6}$$

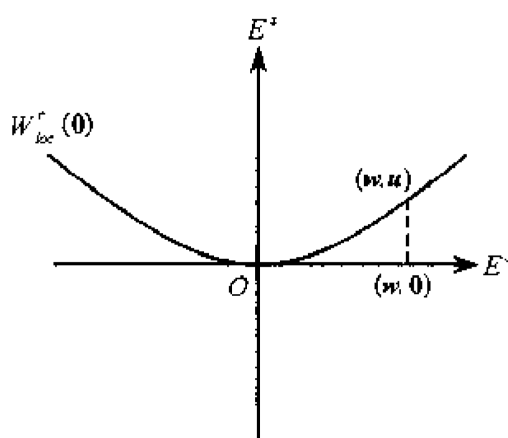


图 3.8　中心流形投影

以 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w})$ 代入式(3.5)的第一方程有

$$D\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w})\cdot\dot{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w})+\boldsymbol{R}_s(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w}) \tag{3.7}$$

将方程(3.6)代入方程(3.7)得

$$D\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w})[\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{w}+\boldsymbol{R}_c(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w})]-\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w})-\boldsymbol{R}_s(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w})=0 \tag{3.8}$$

方程(3.8)是关于 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w})$ 的一阶偏微分方程组。$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w})$ 由方程(3.8)和初始条件 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}, D\boldsymbol{h}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ 完全确定。

从上面可以看出,如果从方程(3.8)中解出了 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w})$,那么中心流形上的解由方程(3.6)决定。事实上,很难从方程(3.8)精确地解出 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w})$。但是,可以很容易在奇点附近从方程(3.8)中近似地解出了 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w})$。这样,由方程(3.6)可以确定轨线在中心流形上的走向。下面举例来说明这一方法。

例 3.5　考虑平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=xy\\ \dot{y}=-y+\alpha x^2\end{cases}\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2$$

其中 α 为常数。

该系统有唯一奇点(0,0),在(0,0)的导算子

$$Df(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

它的特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1$。因而不能用谱方法来确定该奇点的稳定性。下面用计算中心流形方法来确定该奇点的稳定性。

一个直接计算有

$$E^s=\{(x,y)\mid x=0\}\text{——}y\text{ 轴}$$

$$E^c=\{(x,y)\mid y=0\}\text{——}x\text{ 轴}$$

因此所考虑的方程组已经是标准形式。于是

$$W_{loc}^c(0,0)=\{(x,y)\mid y=h(x),h(0)=h'(0)=0\}$$

以 $y=h(x)$代入方程(3.8)得

$$h'(x)[xh(x)]+h(x)-\alpha x^2=0 \tag{3.9}$$

这是关于 $h(x)$的一阶常微分方程,但从该方程中解不出 $h(x)$。因此,我们用近似方法来求 $h(x)$。将 $h(x)$表示为幂级数

$$h(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+O(x^4)$$

这里$|x|$充分小。因 $h(0)=0,h'(0)=0$,所以 $c_0=c_1=0$,于是

$$h(x)=c_2x^2+c_3x^3+O(x^4)$$

以上式代入方程(3.9)得

$$[2c_2x+3c_3x^2+O(x^3)][c_2x^3+c_3x^4+O(x^5)]+c_2x^2+c_3x^3+O(x^4)-\alpha x^2=0$$

比较两边的各项系数得

$$c_2=\alpha \qquad c_3=0$$

故

$$h(x)=\alpha x^2+O(x^4)$$

于是中心流形 $W_{loc}^c(0,0)$上的解满足

$$\dot{x}=xh(x)=\alpha x^3+O(x^5)$$

下面来求稳定流形 $W_{loc}^s(0,0)$。因为

$$W_{loc}^s(0,0)=\{(x,y)\mid x=\bar{h}(y),\bar{h}(0)=\bar{h}'(0)=0\}$$

类似地有

$$\bar{h}'(y)(-y+\alpha\bar{h}^2(y))=y\bar{h}(y)$$

显然 $\bar{h}(y)=0$ 是上面方程的解并且满足 $\bar{h}(0)=\bar{h}(0)=0$,因此

$$W_{loc}^s(0,0)=\{(\dot{x},y)\mid x=0\}$$

即稳定流形 $W_{loc}^s(0,0)$是 y 轴。另外我们也可以以 $\bar{h}(y)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\bar{c}_ny^n$ 代入这个方程后并比较两边各项的系数得 $\bar{c}_n=0(n=,2,3,\cdots)$,由此有 $\bar{h}(y)=0$。

① $\alpha<0$时,在中心流形上的解当 $x>0$时,$\dot{x}<0$,即当 $t\to+\infty$,$x(t)\to0$;而当 $x<0$时,$\dot{x}>0$,即当 $t\to+\infty$,$x(t)\to0$,因而原点是汇(如图 3.9)。

② 当 $\alpha>0$时,在中心流形上的解当 $x>0$时,$\dot{x}>0$,即当 $t\to+\infty$,$x(t)$远离原点;而当 $x<0$时,$\dot{x}<0$,即当 $t\to+\infty$,$x(t)$远离原点,从而奇点是不稳定的。该系统在原点附近的轨线的走向与例 3.4 相似,我们不在此画出。

当 $\alpha=0$时,这个方程组可以解出来,可以直接确定原点的稳定性。

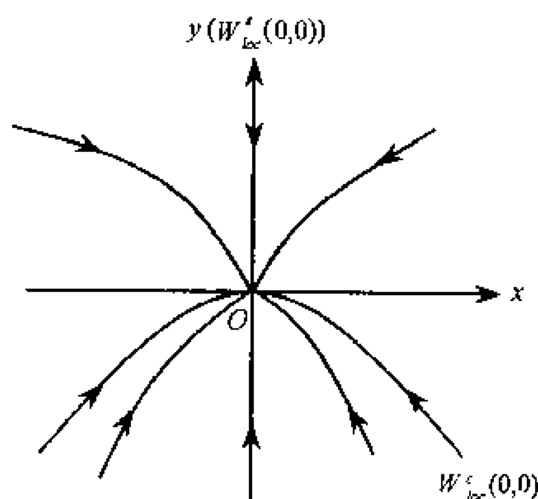


图 3.9 $a<0$ 时原点 O 是汇

例 3.6 考虑二维系统

$$\begin{cases}\dot{x} = x^2y - x^5 \\ \dot{y} = -y + x^2\end{cases} \quad (x,y)\in\mathbf{R}^2$$

显然原点(0,0)是一个奇点。在该点的导算子为

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

其特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1$。容易计算得

$$E^c = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y=0\}\text{——}x\text{ 轴}$$

$$E^s = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x=0\}\text{——}y\text{ 轴}$$

因而该方程组已经是标准形式。因此

$$W_{loc}^c(0,0) = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y=h(x),h(0)=h'(0)=0,|x|\text{很小}\}$$

以 $y=h(x)$ 代入方程(3.8)得

$$[x^2h(x)-x^5]h'(x)+h(x)-x^2=0$$

以 $h(x)=ax^2+bx^3+O(x^4)$ 代入上式得

$$[2ax+3bx^2+O(x^3)][ax^4+b^5-x^5+\cdots]+ax^2+bx^3+O(x^4)-x^2=0$$

由此有 $a=1,b=0$,从而

$$h(x)=x^2+O(x^4)$$

因此,中心流形上解的导数为

$$\dot{x}=x^2h(x)-x^5=x^2[x^2+O(x^4)]-x^5=x^4+O(x^5)$$

由此可知原点 O 是不稳定奇点。

用类似于例 3.5 的方法可求得 $W_{loc}^s(0,0)$ 是 y 轴。综合上述过程,我们可以画出奇点附近的轨线分布图(如图 3.10)。

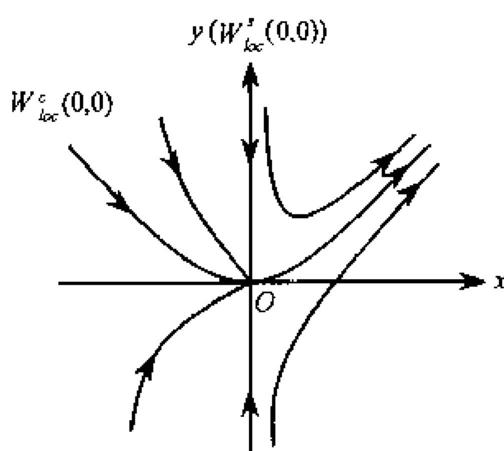


图 3.10　原点 O 是鞍结点

在例 3.5 和例 3.6 中所考虑的系统已经是标准形式。然而，在许多情况下所考虑的系统并不是标准形式。因此，必须先将这种系统化为标准形式。下面举两个例子说明这一事实。

例 3.7　考虑二维系统

$$\begin{cases}\dot{u}=v\\ \dot{v}=-v+\alpha u^2+\beta uv\end{cases}$$

这里 α、β 是常数。该系统有唯一奇点 $O(0,0)$。在该奇点的导算子有两个特征根 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1$，它们对应的特征向量分别是

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0)^{\mathrm{T}}\qquad \boldsymbol{e}_2=(1,-1)^{\mathrm{T}}$$

于是只要作变换

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\ 0&-1\end{pmatrix}$$

就可以把该系统化为下列标准形式

$$\begin{cases}\dot{x}=\alpha(x+y)^2-\beta(xy+y^2)\\ \dot{y}=-y-\alpha(x+y)^2+\beta(xy+y^2)\end{cases}$$

容易计算

$$E^c=\{(x,y)\mid y=0\}\text{——}x\text{ 轴}$$
$$E^s=\{(x,y)\mid x=0\}\text{——}y\text{ 轴}$$

下面先计算 $W^c_{loc}(0,0)$

$$W^c_{loc}(0,0)=\{(x,y)\mid y=h(x),h(0)=h'(0)=0\}$$

以 $y=h(x)$ 代入变换后的方程得

$$h'(x)[\alpha(x+h(x))^2-\beta(xh(x)+h^2(x))]$$
$$=-h(x)-\alpha[x+h(x)]^2+\beta[xh(x)+h^2(x)]$$

以 $h(x)=c_2x^2+c_3x^3+O(x^4)$代入上式可得

$$c_2=-\alpha \qquad c_3=\alpha(2\alpha-\beta)$$

于是

$$h(x)=-\alpha x^2+\alpha(2\alpha-\beta)x^3+O(x^4)$$

从而有

$$\dot{x}=\alpha x^2+O(x^3)$$

由此可知，当 $\alpha>0$ 时，$|x|$足够小时 $\dot{x}>0$；而当 $\alpha<0$ 时，$|x|$足够小时 $\dot{x}<0$。

其次，我们来计算 $W_{loc}^s(0,0)$

$$W_{loc}^s(0,0)=\{(x,y)\mid x=\varphi(y),\varphi(0)=\varphi'(0)=0\}$$

以 $x=\varphi(y)$代入变换后的方程得

$$\begin{aligned}&\varphi'(y)[-y-\alpha(y+\varphi(y))^2+\beta(y\varphi(y)+y^2)]\\&=\alpha(y+\varphi(y))^2-\beta(y\varphi(y)+y^2)\end{aligned}$$

以 $\varphi(y)=d_2y^2+O(y^3)$代入上式并比较 y^2 项的系数，得

$$d_2=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

于是

$$\varphi(y)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)y^2+O(y^3)$$

容易计算

$$\dot{y}=-y+O(y^2)$$

下面是 $\beta>\alpha>0$ 时的原点附近的轨线的走向图(如图 3.11)。

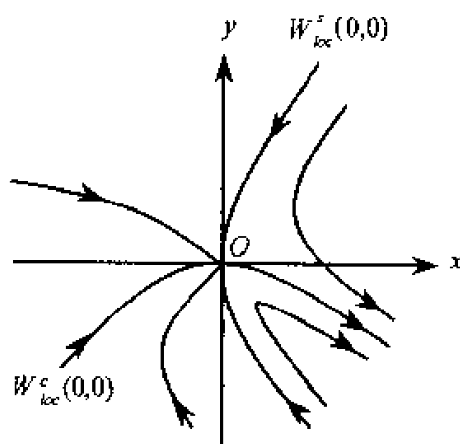


图 3.11　O 是鞍结点

对于其他情况的奇点附近的相图，大家自己可以去画。值得注意的是当 $\alpha=0$，或 $\alpha=\beta$ 时，$W_{loc}^c(0,0)$或 $W_{loc}^s(0,0)$需要重新计算，其幂级数需要展开到更高的阶。

事实上维数越高,其不变子流形的计算越难。下面举一个三维例子说明这一点。

例 3.8　考虑 Lorenz 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=\sigma(y-x)\\ \dot{y}=\rho x-y-xz\\ \dot{z}=-\beta z+xy\end{cases}$$

原点(0,0,0)是它的一个奇点。Lorenz 系统在原点的导算子为

$$\begin{pmatrix}-\sigma & \sigma & 0\\ \rho & -1 & 0\\ 0 & 0 & -\beta\end{pmatrix}$$

当 $\rho=1$,这个矩阵有三个特征根

$$\lambda_1=0\qquad \lambda_2=-(1+\sigma)\qquad \lambda_3=-\beta$$

它们对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{e}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}\qquad \boldsymbol{e}_2=(\sigma,-1,0)^{\mathrm{T}}\qquad \boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

为了把 Lorenz 系统化为标准形式,作变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \sigma & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+\sigma} & \dfrac{\sigma}{1+\sigma} & 0\\ \dfrac{1}{1+\sigma} & -\dfrac{\sigma}{1+\sigma} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

于是,一个直接的计算有

$$\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -(1+\sigma) & 0\\ 0 & 0 & -\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\dfrac{\sigma}{1+\sigma}(u+\sigma v)w\\ \dfrac{1}{1+\sigma}(u+\sigma v)w\\ (u+\sigma v)(u-v)\end{pmatrix}$$

或写成分量形式

$$\begin{cases}\dot{u}=-\dfrac{\sigma}{1+\sigma}(u+\sigma v)w\\ \dot{v}=-(1+\sigma)v+\dfrac{1}{1+\sigma}(u+\sigma v)w\\ \dot{w}=-\beta w+(u+\sigma v)(u-v)\end{cases}$$

由此可知中心流形 $W^c_{loc}(0,0,0)$有如下表示

$$W^c_{loc}(0,0,0)=\{(u,v,w)\mid v=\varphi(u),w=\Psi(u),\\ \varphi(0)=\varphi'(0)=\Psi(0)=\Psi'(0)=0\}$$

以 $v=\varphi(u)$和 $w=\Psi(u)$代入变换后的方程组得

$$\begin{cases}-\dfrac{\sigma}{1+\sigma}\varphi'(u)(u+\sigma\varphi(u))\varphi(u)=-(1+\sigma)\varphi(u)+\dfrac{1}{1+\sigma}(u+\sigma\varphi(u))\Psi(u)\\ -\dfrac{\sigma}{1+\sigma}\Psi'(u)(u+\sigma\varphi(u))\Psi(u)=-\beta\Psi(u)+(u+\sigma\varphi(u))(u-\varphi(u))\end{cases}$$

以 $\varphi(u)=c_2u^2+O(u^3)$及 $\Psi(u)=d_2u^2+O(u^3)$代入上面方程组并比较两边最低次项系数得

$$c_2=0\qquad d_2=\frac{1}{\beta}$$

于是

$$\varphi(u)=O(u^3)\qquad \Psi(u)=\frac{1}{\beta}u^2+O(u^3)$$

以上面两式代入变换后的方程组中的第一个方程得

$$\dot u=-\frac{\sigma}{1+\sigma}(u+O(u^3))\left(\frac{1}{\beta}u^2+O(u^3)\right)=-\frac{\sigma}{\beta(1+\sigma)}u^3+O(u^4)$$

在这里我们并没有将 $\varphi(u)$展成更高阶的幂级数，而求出第一个非零项。读者可以自己考虑这一个问题。从理论上来讲，中心流形总是可以计算出来的，但维数越高，计算越麻烦。

以后，我们要经常考虑含参数系统的分叉问题，即考虑如下含参数系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\qquad \boldsymbol{x}\in U\subseteq\mathbf{R}^n,\ \boldsymbol{\mu}\in J\subseteq\mathbf{R}^m \tag{3.10}$$

的分叉问题，其中 $\boldsymbol{\mu}$ 是参数。现在假设 $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}$ 时，系统(3.10)有奇点 $\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}$。在考虑系统(3.10)的分叉时，必须考虑参数 $\boldsymbol{\mu}$ 的变化。这样在计算系统(3.10)的中心流形时，必须要考虑参数 $\boldsymbol{\mu}$。为了达到这个目的，我们考虑系统(3.10)的扩展系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\\ \dot{\boldsymbol{\mu}}=\mathbf{0}\end{cases} \tag{3.11}$$

从前面已经知道，如果导算子 $D\boldsymbol{f}_x(\mathbf{0},\mathbf{0})$有零实部的特征值，并且其他特征值的实部都小于零，那么系统(3.11)在奇点 $\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}$ 的稳定要由中心流形定理来确定。不失一般性，假设经过适当的坐标变换后把系统(3.11)化为标准形式

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{u}}=A(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})\\ \dot{\boldsymbol{v}}=B(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{v}+\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})\\ \dot{\boldsymbol{\mu}}=\mathbf{0}\end{cases}$$

其中$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{n-k}\times\mathbf{R}^m$，$A(\boldsymbol{\mu})$和$B(\boldsymbol{\mu})$分别为$k$阶和$n-k$阶矩阵，且当$\boldsymbol{\mu}=0$时，$A(\boldsymbol{\mu})$的所有特征值的实部为零，而$B(\boldsymbol{\mu})$的所有特征值的实部都为负。$\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})$与$\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})$至少是二阶无穷小。

例 3.9　考虑下面单参数系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=\lambda x-y-x^2\end{cases}\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \lambda\in\mathbf{R}$$

当$\lambda=0$时，上面系统有唯一奇点$(0,0)$，且此时在$(0,0)$处的导算子为

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

上面矩阵有两个特征值$a_1=0$和$a_2=1$，这说明原点是非双曲奇点。一个直接的计算可得对应于$\alpha_1=0$的特征向量为$\boldsymbol{e}_1=(1,0)^{\mathrm{T}}$，而对应于$a_2=1$的特征向量为$\boldsymbol{e}_2=(1,-1)^{\mathrm{T}}$，于是我们可以作变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

把原方程组化为下列标准形式

$$\begin{cases}\dot{u}=\lambda(u+v)-(u+v)^2\\ \dot{\lambda}=0\\ \dot{v}=-v-\lambda(u+v)+(u+v)^2\end{cases}$$

上面的系统有一个二维的中心流形

$$W_{\mathrm{loc}}^{c}(0,0,0)=\left\{(u,\lambda,v)\left|\begin{cases}v=h(u,\lambda)\\ h(0,0)=0,\dfrac{\partial h(0,0)}{\partial u}=\dfrac{\partial h(0,0)}{\partial\lambda}=0\end{cases}\right.\right\}$$

以$v=h(u;\lambda)$代入上面方程组的最后一个方程并利用前两个方程有

$$\frac{\partial h}{\partial u}[\lambda(u+h)-(u+h)^2]=-h-\lambda(u+h)+(u+h)^2$$

以$h(u,\lambda)=au^2+bu\lambda+c\lambda^2+O((u^2+\lambda^2)^{3/2})$代入上式并比较两边的系数可得

$$a=1\quad b=-1\quad c=0$$

因而

$$h(u,\lambda)=-\lambda u+u^2+O((u^2+\lambda^2)^{3/2})$$

从而中心流形上的流满足

$$\begin{cases}\dot{u}=\lambda u-u^2+O((u^2+\lambda^2)^{3/2})\\ \dot{\lambda}=0\end{cases}$$

由此可以容易确定含参数系统在奇点处的稳定性。

3.4 PB 规范型

在上一节，我们看到如果中心流形是一维的，那么经过近似计算后，可以确定中心流形上在奇点附近的轨线的走向。然而，如果中心流形是二维以上的话，经过近似计算后，在中心流形上的微分方程组的右边是关于坐标函数的多元多项式，因而我们还是难以确定中心流形上在奇点附近的轨线的走向。因此，我们希望经过适当的坐标变换把微分方程组的右边多项式尽可能地化简，这种化简后的微分方程称为 PB 规范型。PB 规范型在高维动力系统的分叉研究中起着十分重要的作用。

下面将详细地介绍怎样计算一个微分方程组的 PB 规范型。

考虑常微分方程组

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \tag{3.12}$$

$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ 是它一个奇点，即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$。现在假设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在零点附近有下列泰勒展开式

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{x}) + \cdots + \boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{x}) + O(\boldsymbol{x}^{k+1}) \tag{3.13}$$

因而在原点附近方程(3.12)可写为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{x}) + \cdots + \boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{x}) + O(\boldsymbol{x}^{k+1}) \tag{3.14}$$

这里 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{x})(i = 2,3,\cdots,k)$ 的每一个分量都是关于坐标函数的 i 次齐次多项式。

BP 规范型的基本思想就是经过一系列坐标变换，把方程(3.14)右边的各次齐次多项式化为最简单的形式。其目的使我们更容易研究方程(3.14)的各种动力学行为以及给方程(3.14)一个适当的分类(尽管这种分类是十分复杂的)。由于我们只在原点附近作坐标变换，因此一般选择接近恒等变换的变换，即作坐标变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y})$$

这里 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y})$ 是一个二阶以上的无穷小量。在 PB 规范型理论中，化简方程(3.14)的右边是从低次项向高次项进行的，每一次化简一个齐次多项式，其中每一次的做法都类似。下面将给出 PB 规范型的计算方法。

为了方便起见，我们首先引进齐次多项式空间的概念。$\mathbf{R}^n$ 上的 j 次齐次多项式空间定义为

$$H_j(\mathbf{R}^n) = \{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = (p_1(\boldsymbol{x}), p_2(\boldsymbol{x}), \cdots, p_n(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} \mid p_i(\boldsymbol{x})$$
$$= \sum_{j_1 + j_2 + \cdots + j_n = j} a_{j_1 \cdots j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n},\ i = 1,2,\cdots,n\}$$

显然这是一个线性空间。

下面我们分几步来进行。先化简 $P_2(x)$。作坐标变换

$$x = y_2 + q_2(y_2) \tag{3.15}$$

其中 $q_2(y_2) \in H_2(\mathbf{R}^n)$是待定函数。因为 $q_2(y_2)$的每一个分量都是坐标函数的二次齐次多项式,从而它在原点附近是二阶无穷小量。因此,只要$|y|$足够小,矩阵$[I + D(q_2(y_2))]$是可逆的(这里 I 是 $n \times n$ 单位矩阵),并且

$$[I + D(q_2(y_2))]^{-1} = I - D(q_2(y_2)) + O(|y_2|^2) \tag{3.16}$$

以方程(3.15)代入方程(3.14)得

$$[I + D(q_2(y_2))] \cdot \dot{y}_2 = A(y_2 + q_2(y_2)) + P_2(y_2 + q_2(y_2)) + \cdots + P_k(y_2 + q_2(y_2)) + O(|y_2|^{k+1})$$

从而

$$\dot{y}_2 = [I + D(q_2(y_2))]^{-1} \cdot [A(y_2 + q_2(y_2)) + P_2(y_2 + q_2(y_2)) + \cdots + P_k(y_2 + q_2(y_2))] + O(|y_2|^{k+1})$$

现在将上式写为各次齐次多项式之和,由方程(3.16)可知上式可写为

$$\dot{y}_2 = Ay_2 + P_2(y_2) - \Omega_A^{(2)}(q_2(y_2)) + P_3^1(y_2) + \cdots + P_k^1(y_2) + O(|y_2^{k+1}|) \tag{3.17}$$

这里 $P_j^1(y_2) \in H_j(\mathbf{R}^n)(j = 3, 4, \cdots, k)$,而

$$\Omega_A^{(2)}(q_2(y_2)) = [Dq_2(y_2)] \cdot Ay_2 - Aq_2(y_2)$$

显然 $\Omega_A^{(2)}$ 把二次齐次多项式映为二次齐次多项式,并且

$$\Omega_A^{(2)} : H_2(\mathbf{R}^n) \to H_2(\mathbf{R}^n)$$

是线性变换。设 $R(\Omega_A^{(2)})$是 $\Omega_A^{(2)}$ 的值域,即

$$R(\Omega_A^{(2)}) = \Omega_A^{(2)}(H_2(\mathbf{R}^n))$$

并且记 $R(\Omega_A^{(2)})$在 $H_2(\mathbf{R}^n)$中的补子空间为 $R^\perp(\Omega_A^{(2)})$,于是 $H_2(\mathbf{R}^n)$有下列直和分解

$$H_2(\mathbf{R}^n) = R(\Omega_A^{(2)}) \oplus R^\perp(\Omega_A^{(2)})$$

因而对于 $P_2(y_2) \in H_2(\mathbf{R}^n)$有如下分解

$$P_2(y_2) = h_2(y_2) + g_2(y_2)$$

这里 $h_2(y_2) \in R(\Omega_A^{(2)})$, $g_2(y_2) \in R^\perp(\Omega_A^{(2)})$。现在取 $q_2^0(y_2) \in H_2(\mathbf{R}^n)$使得 $\Omega_A^{(2)}(q_2^0(y_2)) = h_2(y_2^0)$,那么在坐标变换

$$x = y_2 + q_2^0(y_2) \tag{3.18}$$

下,方程(3.14)可化为

$$\dot{y}_2 = Ay_2 + g_2(y_2) + P_3^1(y_2) + \cdots + P_k^1(y_2) + O(|y_2|^{k+1}) \tag{3.19}$$

由此可以看出,在坐标变换方程(3.18)情况下,一次齐次多项式的形式并没有改

变，而二次齐次多项式得到了化简，在 $\Omega_A^{(2)}$ 值域中的部分被消去。

接下来简化 $P_3^1(y_2)$。类似于上面的过程，作坐标变换

$$y_2 = y_3 + q_3(y_3) \tag{3.20}$$

这里 $q_3(y_3) \in H_3(\mathbf{R}^n)$。同样以方程(3.20)代入方程(3.19)有

$$\dot{y}_3 = Ay_3 + g_2(y_3) + P_3^1(y_3) - \Omega_A^{(3)}(q_3(y_3)) + P_4^2(y_3) + \cdots + P_k^2(y_3) + O(|y_2|^{k+1}) \tag{3.21}$$

这里 $P_j^2(y_3) \in H_j(\mathbf{R}^n)(j = 4,5,\cdots,n)$，并且

$$\Omega_A^{(3)}(q_3(y_3)) = [D(q_3(y_3))] \cdot Ay_3 - Aq_3(y_3)$$

因而类似地有

$$H_3(\mathbf{R}^n) = R(\Omega_A^{(3)}) \oplus R^{\perp}(\Omega_A^{(3)})$$

而 $P_3^1(y_3)$ 有下列分解

$$P_3^1(y_3) = h_3(y_3) + g_3(y_3)$$

这里 $h_3(y_3) \in R(\Omega_A^{(3)}), g_3(y_3) \in R^{\perp}(\Omega_A^{(3)})$。选择 $q_3^0(y_3)$ 使得

$$\Omega_A^{(3)}(q_3^0(y_3)) = h_3(y_3)$$

那么在坐标变换

$$y_3 = y_3 + q_3^0(y_3)$$

下，方程(3.21)可化为

$$\dot{y}_3 = Ay_3 + g_2(y_3) + g_3(y_3) + P_3^2(y_3) + \cdots + P_k^2(y_3) + O(|y_3|^{k+1}) \tag{3.22}$$

重复上面的过程，经过 k 次坐标变换后，可以把方程(3.14)化为

$$y_k = Ay_k + g_2(y_k) + \cdots + g_k(y_k) + O(|y_k|^{k+1}) \tag{3.23}$$

这里 $g_i(y_k) \in R^{\perp}(\Omega_A^{(i)})(i = 2,3,\cdots,k)$。我们把方程(3.23)称为方程(3.14)的 k 阶 PB 规范型。有时也称方程(3.23)的下列截断式

$$\dot{y}_k = Ay_k + g_2(y_k) + \cdots + g_k(y_k)$$

为方程(3.14)的阶 PB 规范型。在大多数情况下，我们只须计算 2 阶 PB 规范型即可。对于一些特殊情况，要计算 2 阶以上的 PB 规范型，这将在以后给出的例子中可看到这一点。

从上面的过程可以看出，计算 k 阶规范型的关键在于确定 $\Omega_A^{(i)}$ 的值域及其值域的在 $H_i(\mathbf{R}^n)$ 中的补子空间。由此也可以看出，PB 规范型也并不是唯一的，它与线性空间的基的选取有关。下面将用矩阵法来计算 PB 规范型。

取 $H_j(\mathbf{R}^n)$ 的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}(m = \dim(H_j(\mathbf{R}^n)))$，由于

$$\Omega_A^{(j)}: H_j(\mathbf{R}^n) \to H_j(\mathbf{R}^n)$$

是线性变换，那么有

$$\Omega_A^{(j)}(e_i) = \sum_{n=1}^{m} a_{in}^j e_n \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

记 $L_j = (a_{in}^j)_{m\times m}$，那么

$$\Omega_A^{(j)}(e_1, e_2, \cdots, e_m) = (e_1, e_2, \cdots, e_m)L_j$$

根据线性代数知识可知，L_j 的复共轭转置矩阵 L_j^* 的零空间 Kernel(L_j^*)是值域 $R(L_j)$的正交补 $R^{\perp}(L_j)$，即 Kernel(L_j^*) = $R^{\perp}(L_j)$，利用这个关系我们可以确定 $R^{\perp}(L_j)$。下面举例说明这一点。

例 3.10　考虑方程组

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + P_2(x) + O(|x|^3) \quad x \in \mathbf{R}^2 \tag{3.24}$$

这里 $P_2(x) = (p_1(x), p_2(x))^T$，以及

$$p_1(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$p_2(x) = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2$$

下面来化简 $P_2(x)$。对于任意 $q_2(y) = (q_1(y), q_2(y))^T \in H_2(\mathbf{R}^2)$，一个直接计算有

$$\begin{aligned}\Omega_A^{(2)}(q_2(y)) &= [Dq_2(y)]\cdot Ay - Aq_2(y) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial q_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial q_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_2 \dfrac{\partial q_1}{\partial y_1} - q_2 \\ y_2 \dfrac{\partial q_2}{\partial y_1} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.25}$$

取 $H_2(\mathbf{R}^2)$中的一组基

$$e_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \quad e_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \quad e_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$e_4(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_5(x) = \begin{pmatrix} x_1x \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_6(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由式(3.25)有

$$\Omega_A^{(2)}(e_1(y)) = \begin{pmatrix} -y_1^2 \\ 2y_1y_2 \end{pmatrix} = 2e_2(y) - e_4(y)$$

$$\Omega_A^{(2)}(e_2(y)) = \begin{pmatrix} -y_1y_2 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = e_3(y) - e_5(y)$$

同理有

$$\Omega_A^{(2)}(e_3(y)) = -e_6(y) \quad \Omega_A^{(2)}(e_4(y)) = 2e_5(y)$$

$$\Omega_A^{(2)}(e_5(y)) = e_6(y) \quad \Omega_A^{(2)}(e_6(y)) = 0$$

于是 $\Omega_A^{(2)}$ 在基 $e_1(y), e_2(y), \cdots, e_6(y)$ 上的矩阵表示为

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

下面首先来确定 Kernel(L_2^*)。设

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_6)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{kernel}(L_2^*)$$

那么

$$L_2^* \boldsymbol{\xi} = 0$$

即有

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{pmatrix} = 0$$

很容易计算出该线性方程组的基础解系是

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (0,1,0,2,0,0)^{\mathrm{T}}$$

于是

$$\mathrm{kernel}(L_2^*) = \{\alpha_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{\xi}_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}\}$$

我们建立 $H_2(\mathbf{R}^2)$ 到 $\mathbf{R}^6$ 的同构

$$\varphi : H_2(\mathbf{R}^2) \to \mathbf{R}^6$$

使得

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{y}))=(1,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$$
$$\varphi(\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{y}))=(0,1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$$
$$\varphi(\boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{y}))=(0,0,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$$
$$\varphi(\boldsymbol{e}_4(\boldsymbol{y}))=(0,0,0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$$
$$\varphi(\boldsymbol{e}_5(\boldsymbol{y}))=(0,0,0,,1,0)^{\mathrm{T}}$$
$$\varphi(\boldsymbol{e}_6(\boldsymbol{y}))=(0,0,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

由上面的同构关系,我们有

$$R^{\perp}(\Omega_A^{(2)})=\{a_1\boldsymbol{e}_1+a_2(\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_4)\mid a_1,a_2\in\mathbf{R}\}$$

于是 $\boldsymbol{g}_2(y)\in R^{\perp}(\Omega_A^{(2)})$可以写为

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{y})=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2(\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_4)=\begin{pmatrix}2a_2y_1^2\\ a_2y_1y_2+a_1y_1^2\end{pmatrix}$$

从而方程(3.24)的二阶规范式为

$$\dot{\boldsymbol{y}}=A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{y})+O(|\boldsymbol{y}|^3)$$

式写成分量形式

$$\begin{cases}\dot{y}_1=y_2+2a_2y_1^2+O(|\boldsymbol{y}|^3)\\ \dot{y}_2=a_2y_1y_2+a_1y_1^2+O(|\boldsymbol{y}|^3)\end{cases}$$

PB 规范型在分叉问题研究中起着十分重要的作用。

今后为了研究分叉问题,我们必须求含参数的微分方程组

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\quad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{\mu}\in\mathbf{R}^m \tag{3.26}$$

的 PB 规范型。因为那时要考虑当参数 $\boldsymbol{\mu}$ 变化时,系统(3.26)的奇点的性质,因此必须求系统(3.26)的扩展系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\\ \dot{\boldsymbol{\mu}}=\boldsymbol{0}\end{cases}$$

的 PB 规范型。但在作近似于恒等的变换时,我们必须保持方程 $\dot{\boldsymbol{\mu}}=\boldsymbol{0}$ 始终不变。显然作近似于恒等变换的变换

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\mu})\\ \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}\end{cases}$$

就可达到目的。

思考题

1. 考虑二维 Duffing 方程

$$\begin{cases}\dot{u}=v\\ \dot{v}=\beta u-u^2-\delta v \quad \delta>0\end{cases}$$

① 试画出 $\beta<0$ 时原点 $O(0,0)$附近的轨线分布图；

② 试画出 $\beta=0$ 时原点 $O(0,0)$附近的轨线分布图。

2. 计算下面三维系统的中心流形

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2y+az^2\\ \dot{y}=-y+x^2+zy\\ \dot{z}=z-y^2+xy\end{cases}$$

3. 当 $\sigma\neq1,\rho=1,\beta=0$ 时，Lorenz 系统在原点 $O(0,0,0)$的导算子有两个零特征根，因此中心流形是二维的，从而 $W_{loc}^c(0,0,0)$可表成如下形式

$$W_{loc}^c(0,0,0)=\{(u,v,w)\mid v=\varphi(u,w)\quad |u|,|v|\text{充分小}\}$$

现在我们将 $\varphi(u,w)$展成二维幂级数

$$\varphi(u,w)=a_{11}u^2+2a_{12}uw+a_{22}w^2+O((u^2+v^2)^{3/2})$$

试确定系数 a_{11}、a_{12}、a_{22}，然后计算中心流形上在原点附近的解曲线满足的近似微分方程组，再进一步计算中心流形上近似微分方程组的 2 阶 PB 规范型。

4. 研究方程组

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{x})+O(|\boldsymbol{x}|^4)\quad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2$$

这里 $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{x})\in H_2(\mathbf{R}^2)$，$\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{x})\in H_3(\mathbf{R}^2)$，试用矩阵法求该方程的 3 阶 PB 规范型，并用极坐标表示该方程的 3 阶 PB 规范型。

第四章 平面系统奇点的分类和极限环

在第二章和第三章，已给出了一般系统的奇点的一个分类。然而，对于平面系统，我们将给出其奇点一个更细的分类。平面系统是最简单的多维系统，以后举出的许多例子是二维系统。平面系统的奇点的几何分类将是了解平面系统的奇点性质的基础。线性平面系统是最简单的二维系统。因此，我们将首先讨论线性平面系统奇点的分类，然后将讨论非线性系统奇点的几何结构。讨论非线性系统的奇点的几何结构时，用非线性扰动方法。将线性系统加一个非线性扰动，然后看看在什么条件下，线性系统的奇点的几何性质可以保留下来。平面系统的周期解及其稳定性也与奇点的性质有关。

4.1 二维线性系统奇点的几何分类

给定二维线性常系数常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = ax + by \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = cx + dy\end{cases} \tag{4.1}$$

其中 a、b、c、d 为实数。原点 $O(0,0)$ 显然是一个奇点。系统(4.1)在奇点的导算子为

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

它的特征方程为

$$D(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

这里 $p = -(a+b)$，$q = ad - bc$。上面代数方程的两个根为

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

下面分几种情况来考虑线性系统(4.1)在奇点附近的几何结构。

(1)鞍点。若 $q < 0$，那么 $p^2 - 4q > 0$，因而 λ_1、λ_2 是实数。由于 $\lambda_1\lambda_2 = q < 0$，因此 λ_1、λ_2 异号。由谱理论，这个奇点是不稳定的。为了弄清奇点附近的几

何结构,必须作进一步分析。为此,我们将解线性方程组(4.1)。

因 λ_1、λ_2 是不同的实根,因此方程组(4.1)的系数矩阵可对角化,即线性方程组(4.1)经过适当的坐标变换后可变量分离。若 $c \neq 0$,由线性代数知识,只须作变换(变换矩阵由 λ_1、λ_2 的特征向量决定)

$$\begin{cases} x' = -cx + (a - \lambda_1)y \\ y' = -cx + (a - \lambda_2)y \end{cases}$$

就可将方程组(4.1)变量分离。我们计算有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} &= -c\lambda_1 x + (ad - bc - d\lambda_1)y \\ &= -c\lambda_1 x + [ad - bc - (a+d)\lambda_1 + \lambda_1^2]y + (a\lambda_1 - \lambda_1^2)y \\ &= \lambda_1[-cx + (a - \lambda_1)y] = \lambda_1 x' \end{aligned}$$

同理有

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = \lambda_2 y'$$

于是在这个变换下,方程组(4.1)变为变量分离的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 x' \\ \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = \lambda_2 y' \end{cases}$$

由此有

$$x' = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \qquad y' = c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

消去 t,得

$$|y'| = c_3 |x'|^{\lambda_2/\lambda_1}$$

因 $\lambda_2/\lambda_1 < 0$,因此,除了沿坐标轴上的轨线外,其余的轨线当 $t \to +\infty$ 都远离原点。例如,不失一般性,设 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$,于是当 $t \to +\infty$ 时,有

$$x' = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \to \infty \ (c_1 \neq 0 \text{ 时})$$

$$y' = c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \to 0$$

从 y' 轴上的点出发的轨线($c_1 = 0$)为

$$x' = 0$$

$$y' = c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \to 0 \quad t \to +\infty$$

而从 x' 轴上的点出发的轨线($c_2 = 0$)为

$$\begin{cases} x' = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \to \infty \quad t \to +\infty \\ y' = 0 \end{cases}$$

由此可画出奇点附近的相图(如图 4.1)。

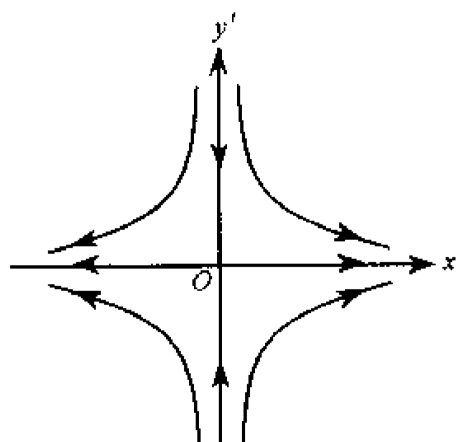


图 4.1　鞍点相图

从相图上可以看出，在 y' 轴的轨线进入奇点，而在 x' 轴的轨线远离奇点，我们把这种奇点叫做鞍点。

若 $c=0, b\neq 0$，只须作变换

$$\begin{cases} x' = (d-\lambda_1)x - by \\ y' = (d-\lambda_2)x - by \end{cases}$$

即可把方程组(4.1)变量分离。

(2)稳定结点。$q>0, p>0, p^2-4q>0$，则 λ_1、λ_2 同是负实根。与上面的过程完全一样，我们可将方程组(4.1)化为

$$\begin{cases} x' = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y' = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

消去 t 得

$$|y'| = c|x'|^{\lambda_2/\lambda_1}$$

因 $\lambda_1<0, \lambda_2<0$，所以当 $t\to+\infty$，有

$$x'\to 0$$
$$y'\to 0$$

即所有轨线都趋于奇点。

下面来画奇点附近的相图。不失一般性，不妨设 $0>\lambda_1>\lambda_2$，从而 $\lambda_2/\lambda_1>1$。因而，除了沿 y' 轴的轨线外，其余的轨线均与 x' 轴相切于奇点 O。这时奇点 O 叫做稳定的结点(如图 4.2)。

(3)稳定焦点。$q>0, p>0, p^2-4q<0$。此时 λ_1、λ_2 是两个共轭复数，令

$$\lambda_1 = u_1 + \mathrm{i}u_2 \qquad \lambda_2 = u_1 - \mathrm{i}u_2$$

这里 $u_1 = -\frac{p}{2}<0, u_2=\sqrt{4q-p^2}$。在这种情况下，用线性代数知识，可以将方

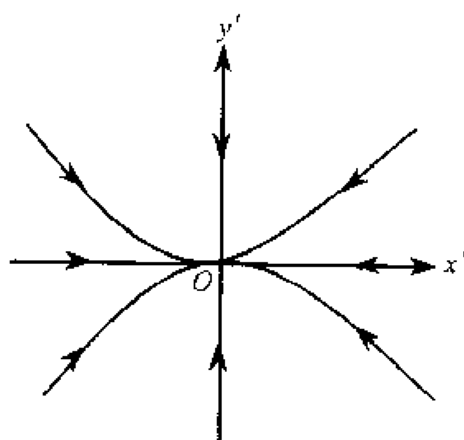


图 4.2　稳定结点相图

程组(4.1)化为下列形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = u_1 x' + u_2 y' \\ \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = -u_2 x' + u_1 y'\end{cases}$$

作极坐标变换 $x' = r\cos\theta, y' = r\sin\theta$,则上面的方程组化为

$$\dot{r} = u_1 r$$

$$\dot{\theta} = -u_2$$

其解为 $r = r(0)\mathrm{e}^{u_1 t}, \theta = -u_2 t + \theta(0)$。由此可知,当 $t \to +\infty$ 时,所有轨线都螺旋形地顺时针方向趋于奇点 O,这时奇点叫稳定焦点(如图 4.3)。

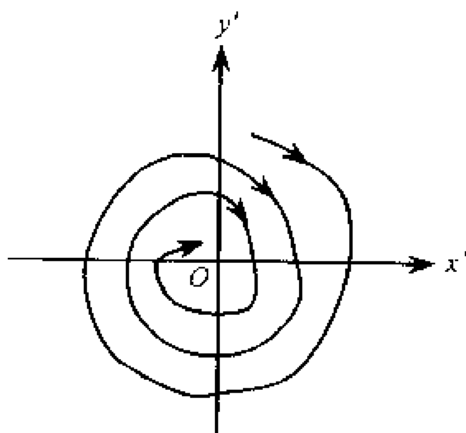


图 4.3　稳定焦点相图

(4)不稳定结点。$q > 0, p < 0, p^4 - 4q > 0$。$\lambda_1$、$\lambda_2$ 同是正实根,在方程组(4.1)中用 $-t$ 代替 t,方程组(4.1)变为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = -ax - by \\ \dfrac{dy}{dt} = -cx - dy\end{cases}$$

它在原点的导算子为

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

其特征方程为

$$D(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda + q = 0$$

它有两个负实根，与(2)一样，只是时间走向相反。

设 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$，可以画出其在奇点附近的相图(如图 4.4)。

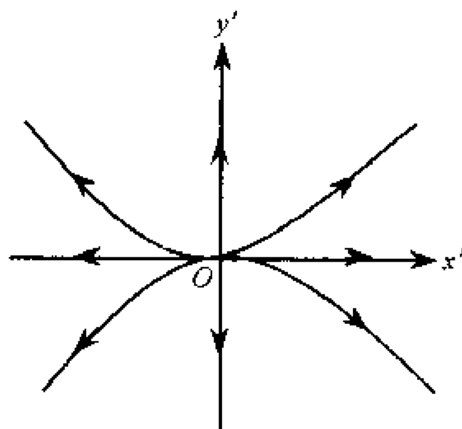


图 4.4　不稳定结点相图

(5)不稳定焦点。$q > 0, p < 0, p^2 - 4q < 0$。$\lambda_1$、$\lambda_2$ 是共轭复数，即

$$\lambda_1 = u_1 + iu_2 \qquad \lambda_2 = u_1 - iu_2$$

这里 $u_1 = -\dfrac{p}{2} > 0$，$u_2 = \sqrt{4q - p^2}$。与(3)类似，只是在这里 $u_1 > 0$，故当 $t \to +\infty$，所有轨线螺旋形地远离原点。这时奇点 O 称为不稳定焦点(如图 4.5)。

(6)中心。$q > 0, p = 0$。λ_1、λ_2 是一对共轭虚根。与(3)类似，可将方程组(4.1)化为

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt} = 0 \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -u_2\end{cases}$$

其解为 $r = r_0 \geqslant 0, \theta = -u_2 t + \theta_0$。轨线是一族以原点 O 为圆心的圆。这时奇点 O 叫做中心(如图 4.6)。

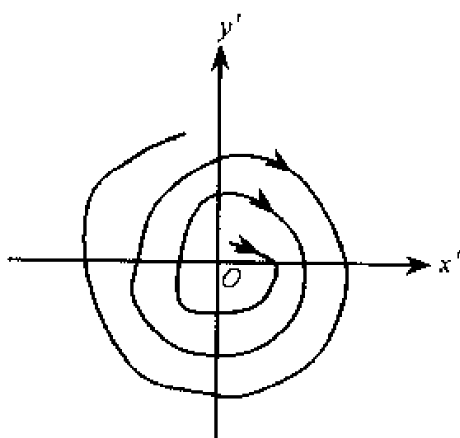


图 4.5　不稳定焦点相图

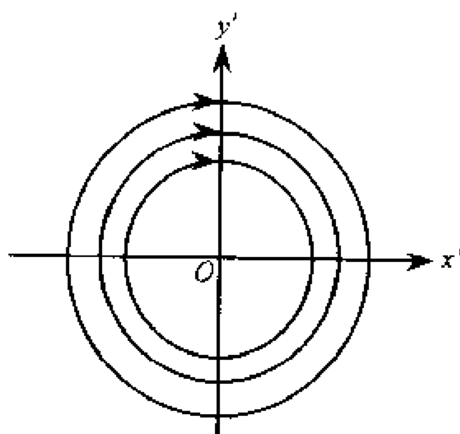


图 4.6　中心相图

(7)稳定临界和退化结点。$q>0,p>0,p^2-4q=0$。这时 $\lambda_1=\lambda_2=-q/2$ 是一对负实重根。分为下列两种情况：

① 初等因子是单的。在这种情况下，方程组(4.1)可化为

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}=\lambda_1 x' \qquad \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}=\lambda_1 y'$$

其解为 $x'=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, y'=c_2\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$。消去 t 得 $y'=c_3x'$，这时奇点 O' 叫做稳定的临界结点(如图 4.7)。

② 初等因子是二重的。经过适当的变换，可将方程组(4.1)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}=\lambda_1 x'\\ \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}=\xi x'+\lambda_1 y'\end{cases}$$

其解为

$$x'=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \qquad y'=\mathrm{e}^{\lambda_2 t}(c_2+\xi c_1 t)$$

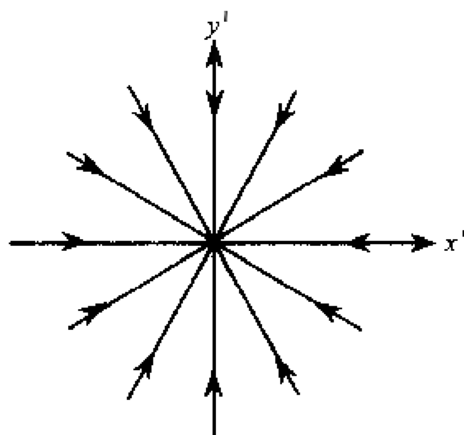


图 4.7　稳定临界结点

消去 t，得

$$y' = x'\left(c + \frac{\xi}{\lambda_1}\ln|x'|\right)$$

显然 $t \to +\infty, x' \to 0, y' \to 0$，而且

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{y'}{x'} = \lim_{t\to+\infty}\left(c + \frac{\xi}{\lambda_1}\ln|x'|\right) = \begin{cases} +\infty & \xi > 0 \\ -\infty & \xi < 0 \end{cases}$$

因此，所有轨线当 $t \to +\infty$ 时都趋于原点，并且在原点与 y 轴相切。这时奇点称为稳定的退化结点（如图 4.8，图 4.9）。

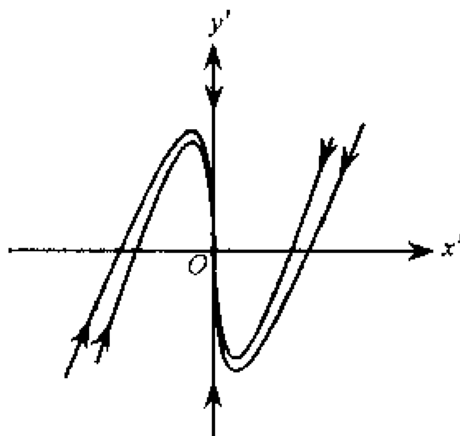


图 4.8　$\xi < 0$

（8）不稳定退化结点。$q > 0, p < 0, p^2 - 4q = 0$。这种情况与上面的情况类似，只是轨线的走向相反，此时称该奇点为不稳定的退化结点。

（9）$q = 0$。读者自己去考虑。

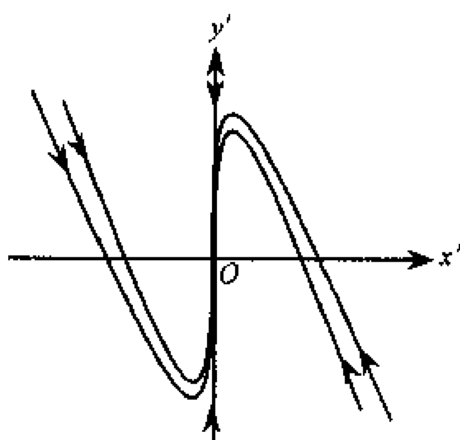


图 4.9 $\xi>0$

我们将情况(1)~(5)中的(p,q)区域用一个图画出来(如图 4.10 所示)。

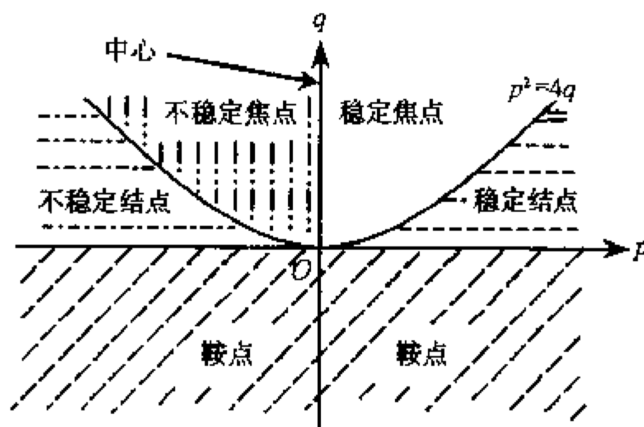


图 4.10 (p,q)区域图

对于余下的情况读者也不难在图中标出。

4.2 非线性平面系统奇点的几何性质

考虑非线性二维自治系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(x,y)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=g(x,y)\end{cases}\tag{4.2}$$

设 $f(0,0)=g(0,0)=0$,即$(0,0)$是方程组(4.2)的一个奇点。现在假设 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$有足够高的可微性,类似于第二章第一节的做法,在奇点$(0,0)$附近将 $f(x,y)$和 $g(x,y)$作二阶泰勒展开得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+O(x^2+y^2)\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)x+\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)y+O(x^2+y^2)\end{cases}\tag{4.3}$$

与第二章类似,下面我们要研究的是:在什么条件下,方程组(4.3)的线性部分在奇点处的几何行为可以保留到非线性系统,即下面要研究的是对线性系统(4.1)加什么样的非线性扰动,奇点的性质不变。事实上,可以考虑比方程组(4.3)更为一般的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+by+\phi(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=cx+dy+\Psi(x,y)\end{cases}\tag{4.4}$$

这里 a、b、c、d 是实数,$\phi(0,0)=\Psi(0,0)=0$,且在原点的某一个领域中 $\phi(x,y)$、$\Psi(x,y)$对 x、y 连续,还满足存在唯一性定理(即 $\phi(x,y)$和 $\Psi(x,y)$满足 Lipschitz 条件)。在这里,我们引入两个条件,即对函数 $\phi(x,y)$与 $\Psi(x,y)$的条件作适当的放宽。引入的条件如下:

条件 1　$\phi(x,y)=o(r)$,$\Psi(x,y)=o(r)$,$r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$。这个条件比 $\phi(x,y)=O(x^2+y^2)$与 $\Psi(x,y)=O(x^2+y^2)$弱得多。

条件 2　$\phi(x,y)$与 $\Psi(x,y)$在原点的某一小领域内对 x、y 连续可微。

为了研究线性系统的非线性扰动后的奇点的性质,我们先给出一些基本定义和定理。

定义 4.1　二维系统(4.2)的奇点 $O(0,0)$叫做稳定(不稳定)吸引子,如果存在 $\delta>0$,使对任何解 $x=x(t)$,$y=y(t)$,当其初始值

$$x^2(t_0)+y^2(t_0)<\delta$$

时,恒有

$$\lim_{t\to+\infty}[x^2(t)+y^2(t)]=0(\text{或}\lim_{t\to+\infty}[x^2(t)+y^2(t)]=0)$$

这个定义可以毫不费力地推广到高系统。对于二维线性系统,稳定结点、稳定焦点以及稳定的临界和退化结点都是稳定吸引子;而不稳定结点、焦点和临界和退化结点都是不稳定吸引子;鞍点不是吸引子,中心也不是吸引子。对于高维系统,渐近稳定的奇点是稳定吸引子,而奇点导算子的所有特征值的实部都大于零的奇点是不稳定的吸引子。

下面我们要考虑的是,线性系统的吸引子在什么条件下,其非线性扰动并不改变吸引子本身及其性质。

定理 4.1　设 $O(0,0)$是方程组(4.1)的稳定(不稳定)吸引子,且方程组

(4.4)的附加项 $\phi(x,y)$ 和 $\Psi(x,y)$ 满足条件 1,则奇点 $O(0,0)$ 也是方程组(4.4)的稳定(不稳定)吸引子。

证明: 当 $O(0,0)$ 是线性系统(4.1)的稳定(不稳定)吸引子时,便有 $q = ad - bc > 0, p = -(a+d) > 0(<0)$。为了确定奇点附近轨线的走向,我们将首先构造一个正定的二次多项式 $V(x,y)$,然后确定轨线在等高线 $V(x,y) = c^2$ 走向。令

$$V(x,y) = (ad - bc)(x^2 + y^2) + (ay - cx)^2 + (by - dx)^2$$

显然 $V(0,0) = 0, V(x,y) > 0$(若 $x^2 + y^2 \neq 0$),且有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(x,y)}{\mathrm{d}t}\right|_{(4.1)} = 2(a+d)(ad-bc)(x^2+y^2) < 0(>0)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(x,y)}{\mathrm{d}t}\right|_{(4.4)} = 2(a+d)(ad-bc)(x^2+y^2) + O[(x^2+y^2)^{3/2}]$$

故当 $r^2 = x^2 + y^2 \ll 1$ 时,有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(x,y)}{\mathrm{d}t}\right|_{(4.4)} < 0(>0)$$

故 $O(0,0)$ 也是方程组(4.4)的吸引子,且不改变稳定性。

这个定理告诉我们在条件 1 下,其吸引子的稳定性不改变,然而其几何结构是否会改变呢?是否一个焦点在扰动后会变成一个结点呢?下面的定理就回答了这个问题。

定理 4.2 将线性系统(4.1)作非线性扰动后,下列结论成立。

① 若(0,0)是方程组(4.1)的稳定(不稳定)的焦点,ϕ、Ψ 满足条件 1,则奇点(0,0)仍为方程组(4.4)的稳定(不稳定)的焦点;

② 若(0,0)是方程组(4.1)的鞍点或正常结点时,且 ϕ、Ψ 满足条件 1、2,则奇点(0,0)仍为方程组(4.4)的鞍点或正常结点,且对于结点来说,稳定性不变;

③ 若(0,0)是方程组(4.1)的退化结点时,且 ϕ、Ψ 满足下列条件:

$$\phi(x,y) = O(r^{1+\varepsilon})\Psi(x,y) = O(r^{1+\varepsilon}) \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

则(0,0)仍为方程组(4.4)的退化结点,且不改变稳定性;

④ 若(0,0)是方程组(4.1)的临界结点时,且 ϕ、Ψ 满足③中的条件,则(0,0)仍为方程组(4.4)的临界结点,且不改变稳定性。

对于中心来说,扰动后可以不再是中心。我们在第六章将会看到中心在受一个小扰动后会变成焦点、或鞍点、或其他非中心奇点,因此在处理中心时要特别小心。

4.3 极限环

极限环是一种孤立的闭轨。在本节,我们将讲授极限环产生的原因,以及判定极限环存在的方法。下面先给出一个例子,以说明极限环的几何意义。

例 4.1　考虑平面系统

$$\begin{cases}\dot{x} = -y + x[u - (x^2 + y^2)]\\ \dot{y} = x + y[u - (x^2 + y^2)]\end{cases}$$

为了解此方程,作极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,则

$$\begin{cases}\dot{r} = \dfrac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = r(u - r^2)\\ \dot{\theta} = \dfrac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2} = 1\end{cases}$$

容易看出当 $u > 0$ 时,有一个定常解 $r^2 = u$,用直角坐标 x 与 y 表示,就是圆周 $x^2 + y^2 = u$。对于其他轨线有两种可能性:

① 从圆周内部的点出发的轨线:因 $r < \sqrt{u}$,则 $\dot{r} > 0$,因此,当 t 增加时,从圆周内部出发的轨线越来越靠近该圆周;

② 从圆周外部的点出发的轨线:因 $r > \sqrt{u}$,则 $\dot{r} < 0$,因此,当 t 增加时,从圆周外部的点出发的轨线越来越靠近该圆周。

因此该圆周是一个孤立的稳定的闭轨——稳定的极限环(如图 4.11)。

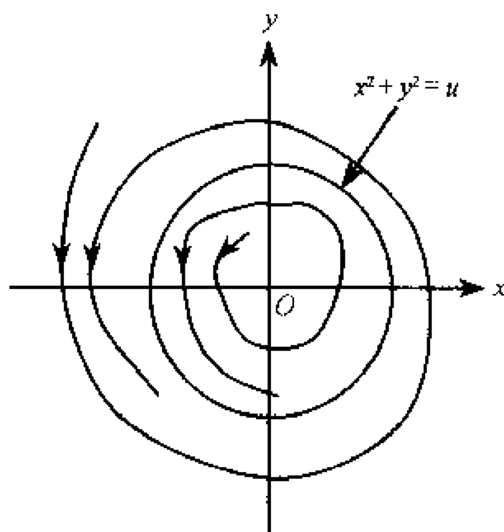


图 4.11　稳定极限环

在上面这个例子中,极限环是可以找出来的,但在大多数情况下,非线性平面系统的解是不能用解析方法积出来的。在精确解不能积出来的情况下,我们

怎样判断闭轨的存在性呢？下面给出一个判断闭轨存在性定理。

定理 4.3(Poincare-Bendixson 环域定理)　设 D 是由两条单闭曲线(不自相交)L_1 和 L_2 所围成的环域，并且在 D 内无奇点，又当 t 增加时，从 L_1 和 L_2 上出发的轨线都入 D(或都离开 D)，则在 D 内存在闭轨 L，其相对位置是 $L_1 \subset L \subset L_2$。

这个定理的几何解释见图 4.12，图 4.13。

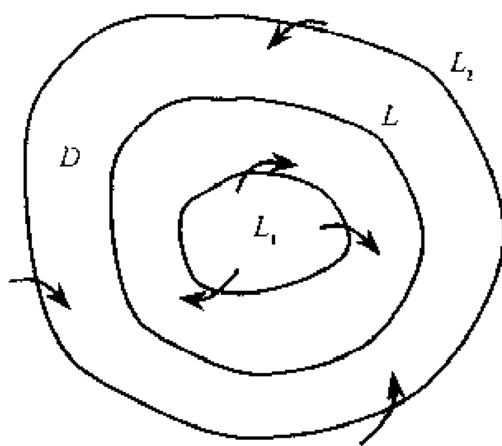


图 4.12　稳定闭轨

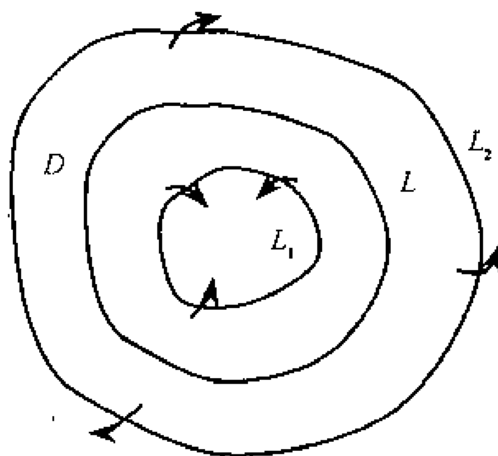


图 4.13　不稳定闭轨

注 1：如果在 L_1、L_2 上有有限条轨线与其相切，该定理仍然成立。

注 2：L_1 可以退化为一个奇点。在图 4.12 中，L_1 可以退化为除鞍点外的其他不稳定奇点；而在图 4.13 中，L_1 可以退化为稳定奇点。

这个定理的证明可以在一般的常微分方程稳定性理论教科书中找到，在这里不给出其证明。

定理 4.3 的特点是不用解方程就能知道闭轨的存在性。这在工程上是重要

的，因为如果知道闭轨存在，可以用近似方法来求出这根闭轨。环域的境界线是简单闭曲线。一个构造境界线的简单做法是构造一个适当的正定函数 $V(x,y)$，通过确定轨线在等高线 $V(x,y)=c^2$ 上的走向来构造境界线。下面用环域定理来证明例 4.1 的闭轨存在性。

记 $V(x,y)=x^2+y^2$，则在轨线上

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2x\dot{x}+2y\dot{y}=2(x^2+y^2)[u-(x^2+y^2)]$$

取

$$L_1: x^2+y^2=\frac{u}{2} \qquad L_2: x^2+y^2=\frac{3u}{2}$$

由前面的式子可知，从 L_1、L_2 上出发的轨线都进入由 L_1 与 L_2 的所包围的环域，由定理 4.3 知道在该环域内存在闭轨。这种证明闭轨存在的方法称为函数法。

下面的问题是怎样构造环域。上面的例子已告诉了我们一种构造法。另外，在构造内境界线 L_1 时，我们可以选择 L_1 是一个焦点或结点。因为焦点或结点附近的轨线要么都跑向奇点，要么都远离奇点。下面介绍另一种方法：Lienard 作图法。

下面考虑 Lienard 方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0 \tag{4.5}$$

如描述无线电波振荡的 Van der Pol 方程

$$\ddot{x}+(x^2-1)\dot{x}+x=0$$

就是方程(4.5)的一种特殊情况。

如果作变换

$$\dot{x}=y-\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$$

于是方程(4.5)等价于下列方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y-F(x)\\ \dot{y}=-g(x)\end{cases} \tag{4.6}$$

这里 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$。

为了作出境界线，必须确定过境界线上每一点的轨线的走向。下面以 $g(x)=x$ 的情形为例，即只考虑作下列方程组的境界线

$$\begin{cases}\dot{x}=y-F(x)\\ \dot{y}=-x\end{cases} \tag{4.7}$$

由方程组(4.7)式确定过 $P(x,y)$ 点的轨线的切线方向是 $(y-F(x),-x)$，面此时切线的斜率为

$$k=\tan\theta=-\frac{x}{y-F(x)}$$

下面从几何上画出过 $P(x,y)$点的轨道的切线方向。其作图过程如下：

① 作出函数 $y=F(x)$的图像4.14；

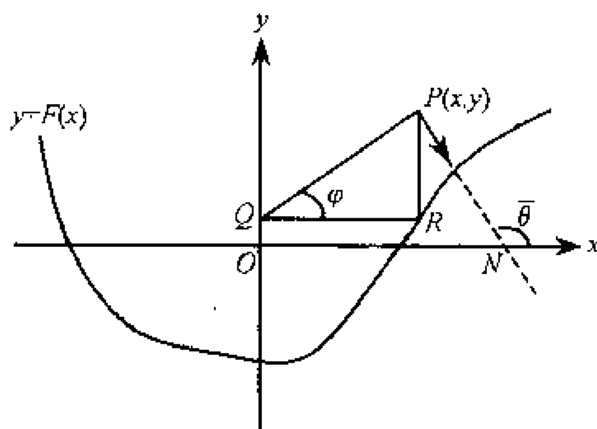


图4.14 过 P 点的轨线的切向

② $P(x,y)$是任一点，过 P 作 $PR//y$ 轴，交曲线 $y=F(x)$于点 $R(x,F(x))$；

③ 过点 $R(x,F(x))$作 $RQ//x$ 轴，交 y 轴于点 $Q(0,F(x))$；

④ 连接 PQ，过 P 点作 PQ 的垂线 PN，交 x 轴于 N 点。下面证明过 P 点的轨线的切线方向就在 PN 上。这是因为

$$\tan\varphi=\frac{y-F(x)}{x}$$

$$\tan\bar{\theta}=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\cot\frac{\varphi}{2}=-\frac{1}{\tan\varphi}=-\frac{x}{y-F(x)}=\tan\theta$$

⑤ 画出当 t 增加切矢量方向。方向完全由方程组(4.7)确定。例如，若点 $P(x,y)$在第一像限，则 $\dot{y}=-x<0$，因而当 t 增加时，y 递减，因而过 P 点的轨线的切线方向指向下。

例4.2 考虑 Van der Pol 方程

$$\ddot{x}+(x^2-1)\dot{x}+x=0$$

它等价于下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x\end{cases}\tag{4.8}$$

下面来证明 Van der Pol 方程存在闭轨。

证明：(1)先作内境界线。如图4.15所示，有两种方法：作图法和奇点法。

① 作图法：取 $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(4.8)}=x^2\left(1-\frac{x^2}{3}\right)$$

则当 $0<|x|<\sqrt{3}, x\neq 0$ 时，$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t>0$，而 $x=0$ 时，$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=0$。故可取 c_1 充分小，使得方程组(4.8)的轨线在点$(0,c_1)$与$(0,-c_1)$处与 $L_1: x^2/2+y^2/2=c_1^2$ 相切外，其余从 L_1 上的点出发的轨线当 t 增加时，都走向 L_1 的外部。

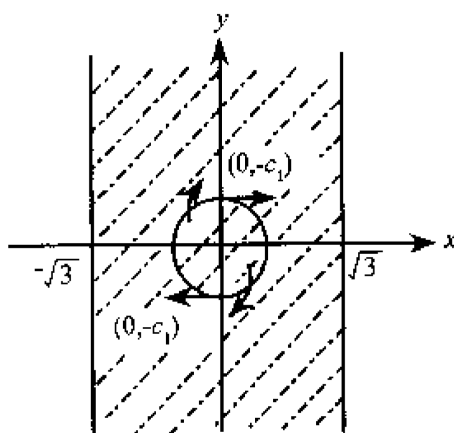


图 4.15　在斜线部分$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\geqslant 0$

② 奇点法：显然原点 $O(0,0)$是奇点。在原点 $O(0,0)$的导算子为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

它的两个特征根为

$$\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

因此奇点 $O(0,0)$是不稳定焦点。

(2) 作外境界线。如图 4.16 所示，作

$$L_2=\overset{\frown}{AB}\cup\overline{BC}\cup\overset{\frown}{CD}\cup\overset{\frown}{DE}\cup\overline{EF}\cup\overset{\frown}{FA}$$

其中$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{CD}$是以 $O_1(0,-2/3)$为中心的圆弧，它们的半径分别为 $x_1+4/3$ 和 x_1 $(x_1>0)$，而 $P_1(1,-2/3)$是曲线 $y=x^3/3-x$ 的极小点；直线$\overline{BC}$的方程是 $x=x_1$；$\overset{\frown}{DE}$、$\overline{EF}$、$\overset{\frown}{FA}$分别与$\overset{\frown}{AB}$、$\overline{BC}$、$\overset{\frown}{CD}$关于原点对称。

① 当 x_1 充分大时，B 点在 $y=x^3/3-x$ 的下方。因为直线 $x=x_1$ 与圆 $x^2+(y+2/3)^2=(x_1+4/3)^2$ 在第一像限的交点的纵坐标为

$$y_B=-\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{8}{3}x_1+\frac{16}{9}}<\frac{x_1^3}{3}-x_1\quad(x_1\text{ 充分大})$$

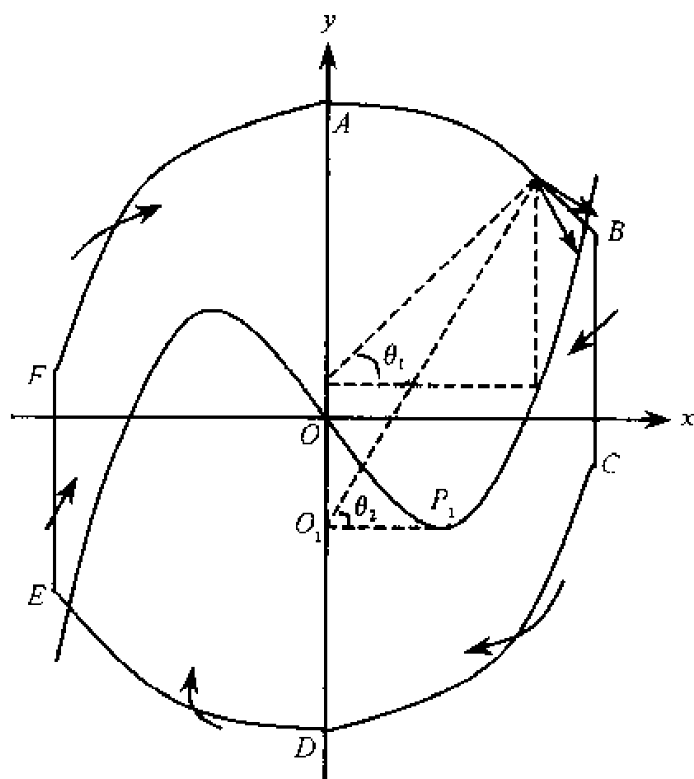


图 4.16　外境界线

② 判断从$\widehat{AB}$上的点出发的轨线在该点的切向。连接 O_1P，如图 4.16 所示，有 $\theta_1 < \theta_2$，因此过 P 点的轨线只能从外向里穿。

③ 判断从$\overline{BC}$上的点出发的轨线在该点的切向。$\overline{BC}$在曲线 $y = x^3/3 - x$ 下方，并在右半平面，于是

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{\overline{BC}} = y - \left(\dfrac{x^3}{3} - x\right) < 0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{\overline{BC}} = -x < 0 \end{cases}$$

因此，从$\overline{BC}$上点出发的轨线当 t 增加，都是从右向左穿过。

④ 类似于②可判断从$\widehat{CD}$上的点出发的轨线的走向。

⑤ 由对称性确定左边的轨线的走向。

因此，由环域定理，该系统存在闭轨。

下面介绍证明闭轨不存在的定理。

定理 4.4（Poincare 切性曲线法）　设 $F(x,y) = c$ 为一曲线旋，$F(x,y) \in C^1(G)$，并且

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{(4.2)} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f\frac{\partial F}{\partial x} + g\frac{\partial F}{\partial y}$$

在 G 内保持常号(即$\geqslant 0$,或$\leqslant 0$),还有

$$f\frac{\partial F}{\partial x}+g\frac{\partial F}{\partial y}$$

不含方程组(4.2)的整条轨线,则方程组(4.2)在 G 内无闭轨。

证明: 用反证法。假设方程组(4.2)在 G 内有闭轨 $\Gamma\subset G$,对函数 $f(\partial F/\partial x)+g(\partial F/\partial y)$按时间增加的方向沿着 Γ 一周积分,得

$$\oint_{\Gamma}\left(f\frac{\partial F}{\partial x}+g\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathrm{d}t=\oint_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

显然上式右边为零,但左边不为零,矛盾。

定理 4.5 (Bendison-Dulac) 考虑单连通区域 G 中的方程组(4.2),假设 $f(x,y),g(x,y)\in C^1(G)$,且存在 $B(x,y)\in C^1(G)$,使得

$$\frac{\partial}{\partial x}(Bf)+\frac{\partial}{\partial y}(Bg)$$

在 G 中保持常号,且不在任何子区域中恒为零,则该系统在 G 中不存在闭轨。

证明: 用反证法。设有闭轨 $\Gamma\subset G$,设 D 是由 Γ 围成的区域,由 Green 公式

$$\oint_{\Gamma}Bf\mathrm{d}y-Bgax=\iint_{D}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Bf)+\frac{\partial}{\partial y}(Bg)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因在 Γ 上处处有$f\mathrm{d}y=g\mathrm{d}x$,故上式左边为零,但右边不为零,矛盾。

例 4.3 证明二维系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)=-y+lx^2+mxy+ny^2\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)=x\end{cases}$$

当 $ml\neq 0$, $n=0$ 时,不存在闭轨。

证明: 取 Dulac 函数

$$B(x,y)=\mathrm{e}^{mx-2y-\frac{m^2}{2}y^2}$$

则

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=mlx^2\mathrm{e}^{mx-2ly-\frac{m^2}{2}y^2}$$

因 $ml\neq 0$,上式除在直线 $x=0$ 外,在全平面保持定号,因而在整个平面上不存在闭轨。

思考题

1. 画出下面系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + e^{x_2} - \cos x_2 \\ \dot{x}_2 = \sin x_1 - \sin x_2\end{cases}$$

在原点附近的相图。

2. 考虑下面平面系统

$$\begin{cases}\dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + (1 - x^2 - 2y^2)y\end{cases}$$

试用函数法证明该系统至少存在一个闭轨。

3. 证明当 $\delta \neq 0$ 时,下面系统

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - \beta x + x^3 = 0$$

无周期解。

4. 证明下面系统

$$\begin{cases}\dot{x} = -y + x[\mu + (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} = x + y[\mu + (x^2 + y^2)]\end{cases}$$

当 $\mu < 0$ 时存在唯一不稳定极限环。

第五章　同宿轨、异宿轨、Poincare 映射及其应用

同宿轨和异宿轨是分叉与混沌研究中的两个最基本的概念。同宿轨或异宿圈的破裂可导致混沌，同宿轨与异宿轨分叉也是一种重要的分叉情况。异宿圈可用于解释涡旋的形成。平面系统的相图有助于了解系统的全局性质。平面相图反映了平面系统的几何结构，从相图上我们可以看到整个系统的几何行为。同宿轨和异宿轨在许多方面都有应用。

5.1　平面系统的同宿轨与异宿轨定义

同宿轨和异宿轨是与奇点联系在一起的特殊轨道。在第一章，已定义同宿轨与异宿轨是当 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$ 时进入或离开奇点的轨道。然而，对于平面系统它们可以用稳定流形与不稳定流形方便描述。

定义 5.1(双曲奇点)　奇点 x_0 称为系统(2.1)的双曲奇点，如果系统(2.1)在奇点 x_0 的导算子 $Df(x_0)$ 的所有特征值的实部不为零，即所特征值只有正的或负的实部。

平面系统的鞍点、焦点和结点都是双曲奇点。下面用稳定流形与不稳定流形来定义平面系统的同宿轨与异宿轨。

定义 5.2　设 a、b 是平面系统(4.2)的两个不同的奇点，若 $W_a^u(a)\cap W_b^s(b)$ 是一条轨道，那么称 $W_a^u(a)\cap W_b^s(b)$ 为异宿轨。

显然若 a、b 都是鞍点，那么 $\dim W_a^u(a)=\dim W_b^s(b)$。在这种情况下，画一个图来解释这个定义，如图 5.1 所示。

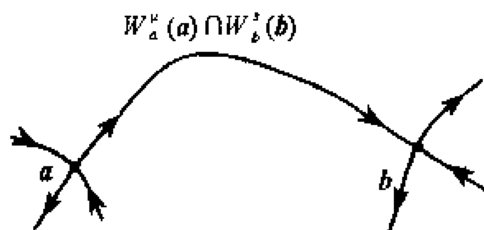


图 5.1　异宿轨图像

从几何上来看，异宿轨是从一个奇点出发且当 $t\to+\infty$ 时，进入另一个奇

点，也即当 $t\to+\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时，轨道进入不同的奇点。

定义 5.3 设 x_0 是系统(4.2)的一个鞍点，如果 $W^u_{x_0}(x_0)\cap W^s_{x_0}(x_0)$ 是一条轨道，那么称 $W^u_{x_0}(x_0)\cap W^s_{x_0}(x_0)$ 为同宿轨(如图 5.2)。

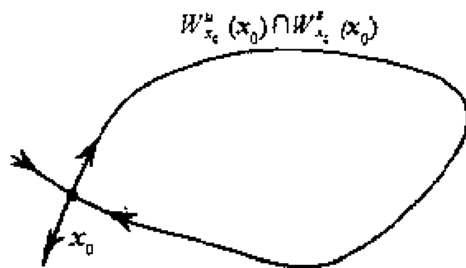


图 5.2 同宿轨图像

从几何图形上可以看出，同宿轨当 $t\to\pm\infty$ 时进入同一个奇点，或更直观地说同宿轨是从一个奇点出发且当 $t\to+\infty$ 时又回到该奇点的轨道。

下面的问题是怎样计算同宿轨与异宿轨。这种轨道是很难计算出来的，这在我们计算中心流形时就已看出这一点。对于高维系统没有一般的计算法。但对于二维 Hamilton 系统有一个算法。

5.2 二维 Hamilton 系统的同宿轨与异宿轨的计算

从第二章我们知道，如果二维系统(4.2)是经典 Hamilton 系统，那么存在 Hamilton 函数 $H(x,y)$，使得

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial y}=f(x,y)\\[2mm]\dot{y}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=g(x,y)\end{cases}$$

面 $H(x,y)$ 是上面二维方程组的一个首次积分，利用这个首次积分，我们可以求出上面方程组进入或离开奇点的轨线。下面举例来说明这一点。

例 5.1 考虑平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=x-x^3\end{cases}$$

它有三个奇点(0,0)，(±1,0)。考虑奇点(0,0)，它的导算子

$$Df(0,0)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

有两个特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$，因此它是鞍点，因而是双曲奇点。下面来求当 $t\to\pm\infty$ 进入或离开(0,0)的轨道，即过原点的轨道。

先求 Hamilton 函数。解偏微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial y}=y\\[2mm] -\dfrac{\partial H}{\partial x}=x-x^3\end{cases}$$

有

$$H=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4$$

因而原方程组有一个守恒量

$$\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4=c$$

若曲线过原点，则有 $c=0$，因此有

$$y=\pm x\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$$

下面来画出该曲线，以上面一支为例，即考虑

$$y=x\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$$

显然该曲线与 x 轴的交点是 $(-\sqrt{2},0)$、$(0,0)$ 和 $(\sqrt{2},0)$。又由于

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2}}}(1-x^2)$$

由此可知，$x=\pm 1$ 是极大点。考虑到对称性，可以画出该曲线为"∞"字型。

曲线已经画出来了，接下来要确定当 $t\to\pm\infty$ 时，曲线的走向。显然对应于 $\lambda=1$ 的特征向量为 $(1,1)$，于是 $E^u=\{(x,y)\mid y=x\}$。同理 $E^s=\{(x,y)\mid y=-x\}$。于是可以画出该曲线的走向(如图 5.3)。

由图 5.3 可以看出，这是两根同宿轨。

另外，从原方程可知同宿轨满足下面的微分方程式

$$\dot{x}=\pm x\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$$

解这个方程并利用初始条件可知两根同宿轨与时间的关系为

$$\Gamma_\pm:(x_\pm^0(t),y_\pm^0(t))=(\pm\sqrt{2}\operatorname{sech}t,\mp\sqrt{2}\operatorname{sech}t\cdot\tanh t)$$

由于其他两个奇点是中心，因此该系统不存在其他同宿轨，也不存在其他异宿轨。

下面举一个存在异宿轨的例子。

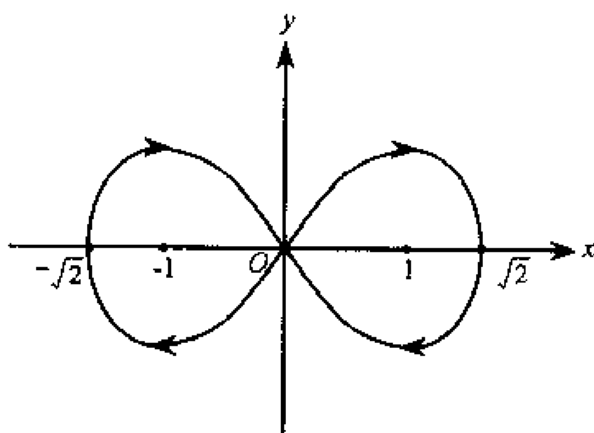


图 5.3 同宿轨

例 5.2 考虑单摆振动方程

$$\ddot{\theta} = -\sin\theta$$

它等价于二维系统

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin\theta \end{cases}$$

显然$(\pm\pi,0)$是他的奇点,并且都是鞍点。

解偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial v} = v \\ \dfrac{\partial H}{\partial \theta} = \sin\theta \end{cases}$$

得

$$H = \frac{1}{2}v^2 - \cos\theta = c$$

现在求过点$(\pm\pi,0)$的解,以 $\theta = \pm\pi, v = 0$ 代入上式求得 $c = 1$,从而过$(\pm\pi,0)$的解为

$$\frac{1}{2}v^2 - 1 - \cos\theta = 0$$

$$v = \pm\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}$$

因而这是两条异宿轨。类似于上例可以很容易确定出两奇点的特征方向。例如对于奇点$(\pi,0)$,有

$$E_\pi^s = \{(\theta, v) \mid v = \pi - \theta\}$$

$$E_\pi^u = \{(\theta, v) \mid v = \theta - \pi\}$$

于是可以画出这两条异宿轨的图像(如图 5.4)。

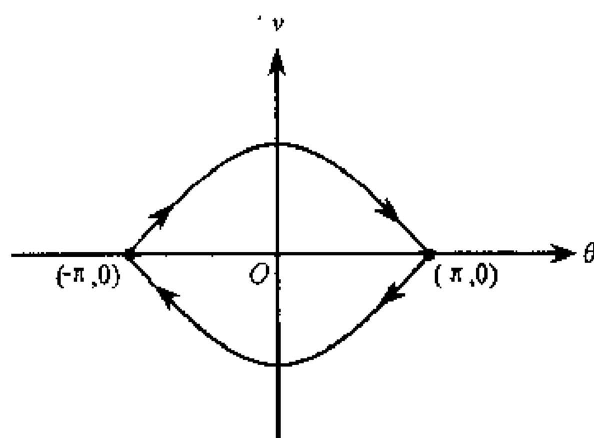


图 5.4　异宿轨

我们可以求出两条异宿轨与时间的关系。解微分方程

$$\dot{\theta}=\pm\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}$$

得在上半平面的异宿轨与时间的关系为

$$\Gamma_{+}:[\theta_{+}^{0}(t),v_{+}^{0}(t)]=(2\arctan(\sinh t),2\operatorname{sech} t)$$

而在下半平面为

$$\Gamma_{-}:[\theta_{-}^{0}(t),v_{-}^{0}(t)]=-[\theta_{+}^{0}(t),v_{+}^{0}(t)]$$

由例 5.1 和例 5.2 可归纳求出二维 Hamilton 系统同宿轨和异宿轨的步骤如下：

① 确定系统的奇点和奇点的性质(不会有进入中心的同宿轨或异宿轨)；

② 求出系统的 Hamilton 函数；

③ 由 Hamilton 函数找出进入奇点的轨道并画出轨道的图像；

④ 通过积分算出进入奇点的轨道与时间的关系。

5.3　平面 Hamilton 系统相图的画法

与上节类似，我们同样以具体例子来讲解怎样画平面 Hamilton 系统相图。如果可以画出一个平面系统的相图，我们可以从相图上看出系统的全局几何行为。

我们仍以上节的两个例子来讲解怎样画平面 Hamilton 系统的相图。

例 5.3　画出平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=x-x^{3}\end{cases}$$

的平面相图。从上节可知，这个系统有一个首次积分

$$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}=c$$

令 $V(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}$，于是 $y=\pm\sqrt{2[c-V(x)]}$。下面我们分几步来画相图。

(1) 画 $V(x)$ 的图像。

$V(x)$ 与 x 轴相交于原点 $(0,0)$、$(\sqrt{2},0)$ 及 $(-\sqrt{2},0)$ 点，它有两个极小点 $(-1,-1/4)$ 及 $(1,-1/4)$ 及一个极大点 $(0,0)$，如图 5.5 所示。

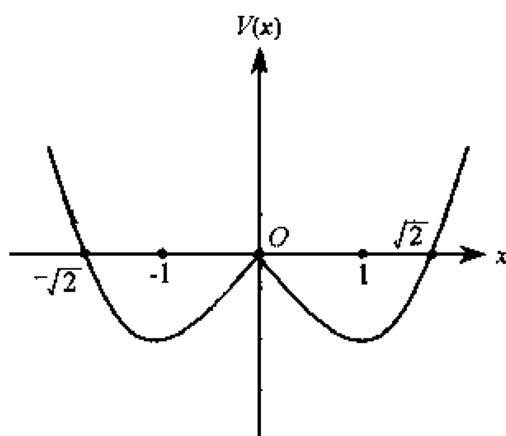


图 5.5　$V(x)$ 的图像

从图 5.5 可知函数 $y=\pm\sqrt{2[c-V(x)]}$ 的单调区间。

(2) 画 $y=\pm\sqrt{2[c-V(x)]}$。

① $c=0$，$y=\pm\sqrt{-2V(x)}$ 是两条同宿轨，见例 5.1。

② 当起点在同宿轨内部时，以右半平面为例，取 x 轴上任一点 $x_0(0<x_0<1)$，由于轨线过 x_0，则有

$$-\frac{x_0^2}{2}+\frac{x_0^4}{4}=c$$

从而 x 的取值范围由 $V(x)\leqslant c$，即 $-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\leqslant-\frac{x_0^2}{2}+\frac{x_0^4}{4}$ 确定。因此有 $x_0\leqslant x\leqslant\sqrt{2-x_0^2}$。区间的两端点就是过 x_0 点轨线与 x 轴的交点。而过 x_0 点曲线的表达式为

$$y=\pm\sqrt{2\left[-\frac{x_0^2}{2}+\frac{x_0^4}{4}-V(x)\right]}$$

结合(1)可知该过 x_0 点轨线是包含右边奇点的闭曲线(如图 5.6)。

③ 同理可画出从同宿轨外部任一点出发的轨线。

从相图上可以看出：同宿轨内部的奇点是中心，同宿轨内部的轨道是包围一

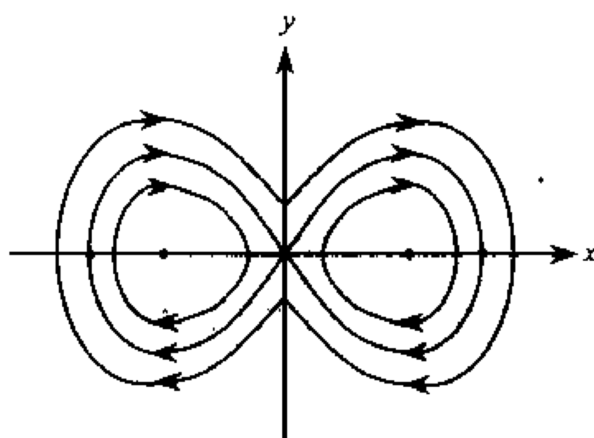


图 5.6 相图

个中心的闭轨，而同宿轨外部的轨道是包围三个奇点的闭轨。

例 5.4 画出单摆系统

$$\ddot{\theta} = -\sin\theta$$

的平面相图。

它等价于平面系统

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin\theta \end{cases}$$

它有一个守恒量

$$\frac{v^2}{2} - \cos\theta = c$$

即

$$v = \pm\sqrt{2(c+\cos\theta)}$$

这个平面系统有无穷多个奇点$(\pm n\pi,0)(n=0,1,2,\cdots)$，容易计算

$$Df(\pm n\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos n\pi & 0 \end{pmatrix}$$

n 为奇数时，导算子的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$，因而此时的奇点是鞍点；而 n 为偶数时，$\lambda_3=\mathrm{i},\lambda_4=-\mathrm{i}$，奇点是中心。

当 n 为奇数时，对应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $e_1=(1,-1)^{\mathrm{T}}$，而对应于 $\lambda_2=-1$的特征向量为 $e_2=(1,1)^{\mathrm{T}}$。由此可以确定过这些奇点的稳定流形与不稳定流形的走向。例如对于奇点$(\pi,0)$，有

$$E_\pi^s = \{(\theta,v) \mid v = \pi-\theta\}$$

$$E_\pi^u = \{(\theta,v) \mid v = \theta-\pi\}$$

由于周期性，我们只须画一个周期区间$[-\pi,\pi]$中的相图即可。

① $v(\theta)=\cos\theta(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$的图像(如图 5.7);

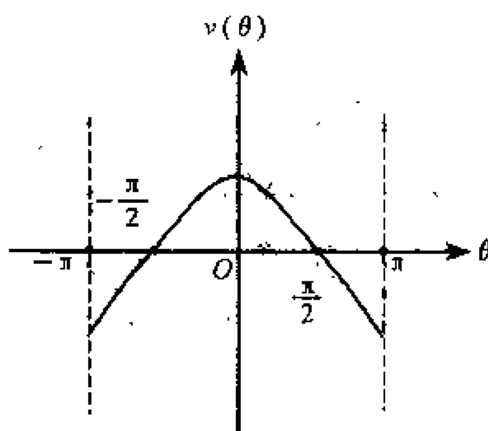


图 5.7 $v(\theta)$的图像

② 画出过两奇点$(-\pi,0)$与$(\pi,0)$的异宿轨,见例 5.2;

③ 类似例 5.3。

于是可画出整个平面上的相图(如图 5.8)。

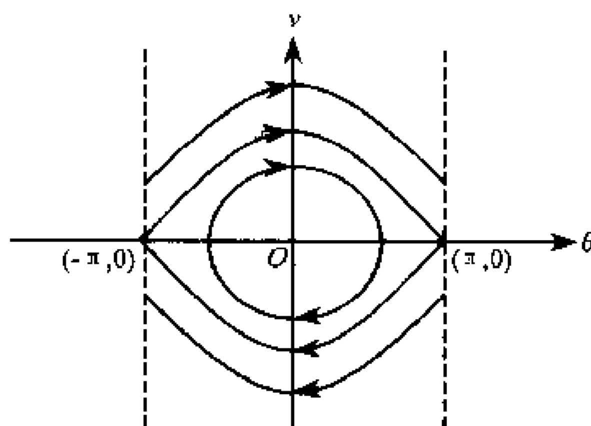


图 5.8 相图

从这个相图上可知:当摆从位置 $-\pi<\theta_0(\neq0)<\pi$ 以零初速度放下时,摆来回作周期摆动;当摆从位置 $-\pi<\theta_0(\neq0)<\pi$ 以足够大的初速度(两条异宿轨包围的区域外部)放下时,摆并非来回作周期摆动,而是一圈接一圈地作周期运动;平衡位置 $\theta_0=0$ 是稳定的,平衡位置 $\theta_0=\pi$ 是不稳定的。

由例 5.3 和例 5.4 可归纳出画二维 Hamilton 系统相图的步骤如下:

① 确定系统的奇点、奇点的稳定性和鞍点的稳定流形和不稳定流形的方向;

② 求出系统的 Hamilton 函数;

③ 画出由 Hamilton 函数决定的等高线。

5.4　常微分方程组解的渐近行为

在这一节我们将引进流的概念。虽然这个概念很抽象，但它给我们处理问题带来极大的方便。

考虑一般的常微分方程

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in \mathbf{R}^n \tag{5.1}$$

以后我们总是假定上面方程满足解的存在唯一性定理，并且其解可延拓到整个 $\mathbf{R}$ 上。现记在 $t=0$ 时，方程过点 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 的解为 $\phi(t, x_0)$（由唯一性定理，满足初始条件 $x_0(0) = x_0$ 的解 $x = x(t)$ 是唯一的），从而有

$$\phi(0, x_0) = x_0$$

现在让 x_0 在 $\mathbf{R}^n$ 中移动，那么得一系列解 $\phi(t, x)$，因此 ϕ 是 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 上的映射

$$\phi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$
$$(t, x) \to \phi(t, x)$$

显然，若 x_0 是方程(5.1)的一个奇点的话，那么

$$\phi(t, x_0) = x_0$$

因此奇点是 ϕ 的不动点。我们称 ϕ 是微分方程组(5.1)的流。流具有下列性质：

① 当 x 固定时，$C_x(t) = \phi(t, x)$ 是方程(5.1)在 $t=0$ 时过 x 点的解，即有

$$\phi(0, x) = x$$

② $\phi(t+s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$。这个等式由解的唯一性定理很容易证明：$\phi(t, \phi(s, x))$ 是微分方程(5.1)在 $t=0$ 时过点 $\phi(s, x)$ 的解，同样 $\phi(t+s, x)$ 也是微分方程(5.1)在 $t=0$ 时过点 $\phi(s, x)$ 的解。

③ 如果将时间 t 固定，并且记

$$F_t(x) = \phi(t, x)$$

即 $F_t: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 的一个映射，显然有

$$F_0(x) = \phi(0, x) = x$$

即

$$F_0 = id$$

并且不难证明关于映射的复合运算“$\circ$”下列关系成立。

$$F_{t+s} = F_t \circ F_s = F_s \circ F_t$$

$$F_0 = F_{t-t} = F_t \circ F_{-t} = F_{-t} \circ F_t = id$$

因此映射集合$\{F_t\}_{t\in\mathbf{R}}$关于映射的复合运算"∘"构成一个乘法群。

下面用流来定义两个描述解的渐近行为的概念 α－极限集和 ω－极限集。

定义 5.4 设 $\phi(t,x)$是方程(5.1)的流。点 x_0 称为点 $x\in\mathbf{R}^n$ 的 ω－极限点，如果存在一个时间序列$\{t_i\}$，当 $t_i\to+\infty$时，有

$$\phi(t_i,x)\to x_0$$

ω－极限点的几何解释如图 5.9 所示。点 x 的所有 ω－极限点组成的集合记为 $\omega(x)$。

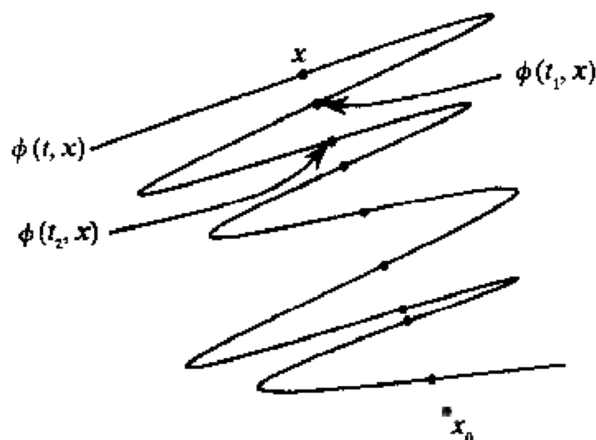


图 5.9　x_0 是 x 的 ω－极限点

定义 5.5 设 $\phi(t,x)$是方程(5.1)的流，点 x_0 称为点 $x\in\mathbf{R}^n$ 的α－极限点，如果存在时间序列$\{t_i\}$，当 $t_i\to-\infty$时，有

$$\phi(t_i,x)\to x_0$$

点 x 的所有α－极限点的集合记为 $\alpha(x)$。

例 5.5 考虑平面上一个具有鞍点的系统，记此鞍点为 x_0，那么 x_0 是稳定流形上任一点的 ω－极限点和不稳定流形上任一点的 α－极限点(如图 5.10)。

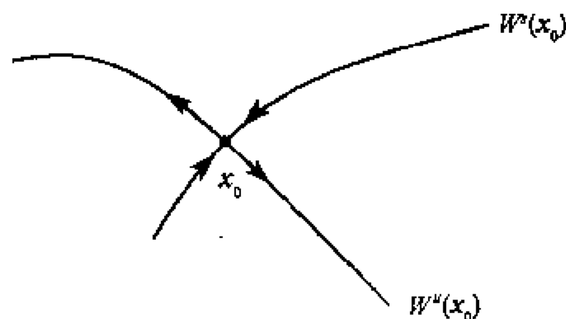


图 5.10　鞍点既是 ω－极限点又是 α－极限点

例 5.6 考虑一个具有稳定极限环 r 的平面系统，那么极限环 r 附近的任一点的ω－极限点构成的集合 $\omega(x)=r$，但$\lim\limits_{t\to\infty}\phi(t,x)\neq r$(如图 5.11)。

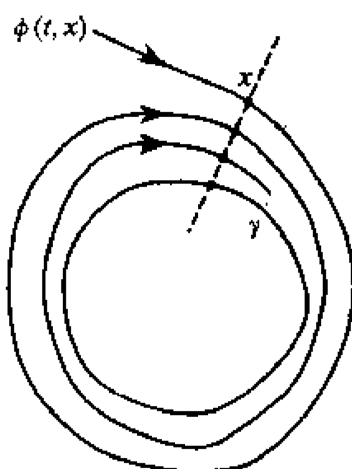


图 5.11　ω - 极限集是一条闭轨

定义 5.6　设 $\phi(t,x)$ 是微分方程(5.1)的流，集 $\Lambda\in\mathbf{R}^n$ 称为流 $\phi(t,x)$ 的吸引集，如果存在某一邻域 U 使得

$$\forall x\in U,\forall t\geqslant 0,\phi(t,x)\in U$$

且当 $t\to+\infty$ 时，有 $\phi(t,x)\to\Lambda$(如图 5.12)。

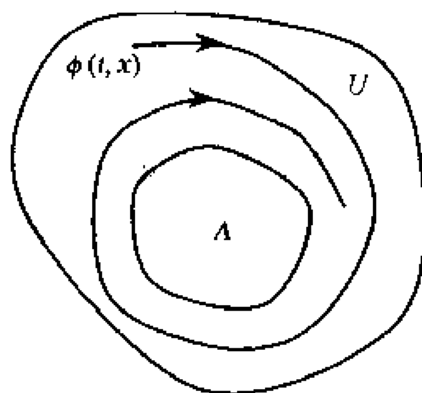


图 5.12　Λ 是吸引集

显然稳定的奇点和稳定的极限环都是吸引集。

定义 5.7　Λ 和 U 的定义如定义 5.6，Λ 的吸引域(或吸引盆)定义为下列集合

$$\bigcup_{t\leqslant 0}\phi(t,U)$$

这里 $\phi(t,v)=\{\phi(t,x)\mid x\in U\}$。

定义 5.8　设 $\phi(t,x)$ 是微分方程(5.1)的流，连通集 M 称为是该流的捕捉区域(trapping region)，如果 $\forall t\geqslant 0,\phi(t,M)\subset M$(即 M 是流的正不变集)。或者等价地说过 M 的边界 ∂M 上任一点的轨线的切向指向 M 的内部。这里

$$\phi(t,M)=\{\phi(t,x)\mid x\in M\}$$

显然,如果我们定义

$$\Lambda=\bigcap_{t>0}\phi(t,M)$$

那么 Λ 是一个吸引集。由此可知,要构造一个吸引集(或吸引子),只须找到一个捕捉区域即可。现在的问题是怎样构造一个捕捉区域?我们可以用 Liapunov 函数法来构造捕捉区域。下面用例子来说明这一方法。

例 5.7 考虑无阻尼的谐振子系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=x-x^3-\delta y \quad \delta>0\end{cases} \tag{5.2}$$

当 $\delta=0$ 时,我们在前面已经详细地研究过了,从其相图上可看出系统的所有轨道的长时期行为。当 $\delta=0$ 时,系统有一个首次积分

$$H(x,y)=\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}$$

并且从前面的相图上可以看出,除两条同宿轨和奇点外,其他轨线都是闭曲线。现在我们在方程组(5.2)上计算

$$\left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.2)}=y\dot{y}-x\dot{x}+x^3\dot{x}=-\delta y^2\leqslant 0$$

因此从等高线

$$L:\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}=c$$

上的点出发的方程组(5.2)的轨线,当 $t\to+\infty$ 时,都进入该封闭曲线围成的区域(如图 5.13)。

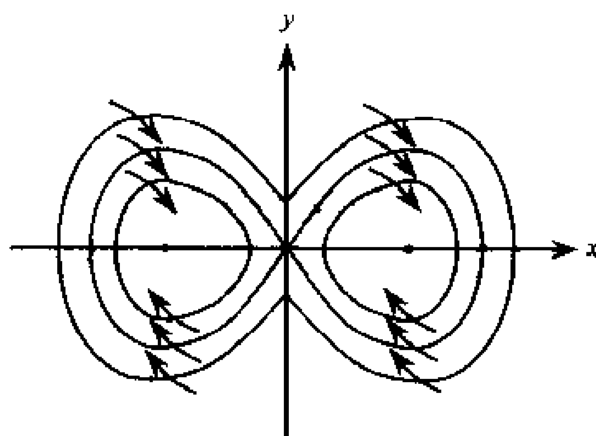


图 5.13 等高线上轨线的走向

取 c 足够大,使等高线 L 的内部包含方程组(5.2)的三个奇点$(-1,0)$;$(0,0)$,$(1,0)$,记 L 围成的区域为 M,则有

$$\Lambda=\bigcap_{t>0}\phi(t,M)=\{(-1,0),(1,0)\}$$

例 5.8　考虑 Lorenz 系统

$$\begin{cases}\dot{x} = -\sigma(x-y) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy\end{cases}$$

取 $\sigma = 10, \beta = 8/3, \rho = 28$，该系统有 3 个奇点 $(0,0,0)$，$(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ 以及 $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$，对应于奇点 $(0,0,0)$ 的导算子的三个特征根是 $\lambda_1 = -8/3$，$\lambda_2 = 11.83$，$\lambda_3 = -22.83$，因此该奇点是鞍点。对应于 $(\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)$ 的三个特征值分别为 $\lambda_1 = -13.85$，$\lambda_{2,3} = 0.094 \pm 10.19\mathrm{i}$。因此三个奇点都是不稳定奇点。而对于每一个奇点都有进入奇点的轨线，也有离开奇点的轨线。取

$$V = 14x^2 + 5y^2 + 5(z-56)^2$$

容易计算得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -10\left[28x^2 + y^2 + \frac{8}{3}(z-28)^2 - \frac{6272}{3}\right]$$

所以当我们取 $c^2 > \frac{6272}{3}$，并且使椭球 $14x^2 + 5y^2 + 5(z-56)^2 \leqslant c^2$ 包含椭球 $28x^2 + y^2 + \frac{8}{3}(z-28)^2 \leqslant \frac{6272}{3}$ 时，在椭球面 $14x^2 + 5y^2 + 5(z-56)^2 = c^2$ 的外部有 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < 0$，由此可知

$$M = \{(x, y, z) \mid 14x^2 + 5y^2 + 5(z-56)^2 \leqslant c^2\}$$

是一个捕捉区。记

$$\Lambda = \bigcap_{t>0} \phi(t, M)$$

它就是 Lorenz 吸引子。由上也可知，Λ 的吸引域是整个 $\mathbf{R}^3$。

现在来看 Λ 的性质：取 c 足够大，使捕捉区域 M 包含三个奇点。Λ 外面轨道当 $t \to +\infty$ 时趋于 Λ，而从奇点附近出发的轨线远离奇点。这种稳定与不稳定的相互作用就导致奇怪吸引子。

5.5　非保守平面系统的相图

从本章第二节已经看到，对于二维 Hamilton 系统，我们可以求出轨线。而对于非保守系统，常常很难求出其轨线。因此，要画非保守系统相图，必须认真分析奇点性质，以及稳定流形与不稳定流形走向。下面先介绍关于平面系统 ω－极限集与 α－极限集的定理。

定理 5.9(Poincare-Bendixson)　设 M 是平面上一个闭的紧致集，并且是平面系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,y)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(x,y)\end{cases}$$

的正不变集，设 $p\in M$，那么下列可能性成立。

① $\omega(p)$是一个奇点。

② $\omega(p)$是一条闭轨。

③ $\omega(p)$是由有限个奇点 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 和有限条轨道 $r_i(\alpha(r_i)=p_i,\omega(r_i)=p_j$，同宿轨，或异宿轨)构成。

这个定理的证明要用到一些拓扑知识，我们不在这里给出它的证明。对于 α - 极限集也有类似定理。

例 5.10 画出无阻尼的谐振子系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=x-x^3-\delta y\quad(0<\delta<2\sqrt{2})\end{cases}$$

的平面相图。

该系统有三个奇点$(-1,0)$，$(0,0)$及$(1,0)$，原点是鞍点，$(-1,0)$与$(1,0)$是两个焦点，而函数

$$H(x,y)=\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}$$

的等高线围成的区域是正不变集(如图 5.14)。

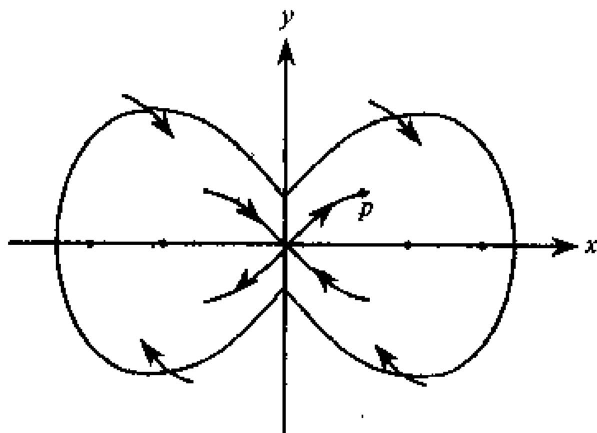


图 5.14 正不变集

下面要考虑稳定流形与不稳定流形的走向。

① 由于该系统的散度

$$\frac{\partial}{\partial x}(y)+\frac{\partial}{\partial y}(x-x^3-\delta y)=-\delta<0$$

因此该系统不存在闭轨。

现在我们在不稳定流形 $W^u(0,0)$上任取一点 p，那么 $\omega(p)$和 $\alpha(p)$不是闭轨的，由上面的定理可知 $\omega(p)$和 $\alpha(p)$都是由一个奇点构成的集合。

② $\omega(p)$不是原点，否则不稳定流形 $W^u(0,0)$当 $t\to+\infty$时回到原点，从而不稳定流形 $W^u(0,0)$是同宿轨，并且由于该系统右边的函数关于原点对称，因而同宿轨内部至多包含一个焦点。于是对于同宿轨内部的任一点 q，$\omega(q)$和$\alpha(q)$或者都是空集（同宿轨内部不包含奇点）、或者是同一个焦点，矛盾。这证明了当 $t\to+\infty$时，不稳定流形 $W^u(0,0)$进入焦点。显然，当 $t\to+\infty$时，不稳定流形 $W^u(0,0)$的右边那支只能进入右边的焦点，不稳定流形 $W^u(0,0)$的左边那支只能进入左边的焦点（如图 5.15）。

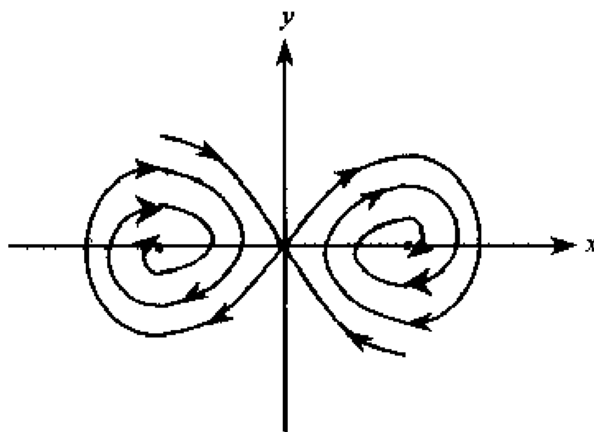


图 5.15　不稳定流形的走向

③ 系统的相图如图 5.16 所示。

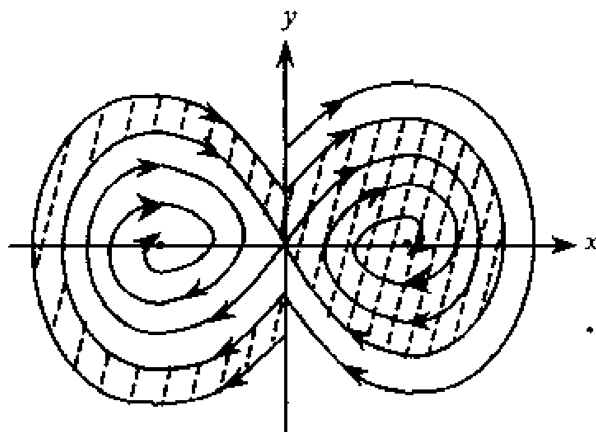


图 5.16　系统的相图

从这个相图可知：从斜线部分区域内或从不稳定流形右边分支上任一点出发的轨线，当 $t\to+\infty$时，趋于右边的焦点，因此斜线部分区域是右边焦点的吸引域；从非斜线部分区域内或从不稳定流形左边分支上任一点出发的轨线，当

$t \to +\infty$时，趋于左边的焦点，因此非斜线部分区域是左边焦点的吸引域。

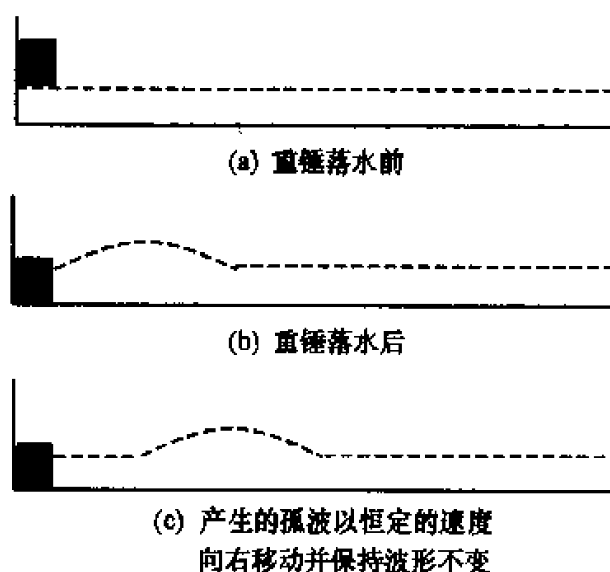
5.6 同宿轨、异宿轨与孤立波

历史上，孤波的发现与孤子概念的建立，是从一维浅水槽中小振幅波的研究开始的。由于人们对自然现象的细心观察而发现了孤波，随后又进行了认真的实验研究和理论工作，导出了描述这一物理现象的 KdV 方法。通过对 KdV 方程的数值研究，发现孤波相互作用后仍能保持各自的波形和速度，终于建立了"孤子"的概念。孤立子强调孤波的稳定性。

(1) 孤波的发现。1834 年，英国科学家罗素(Scott Russell)在爱丁堡道格拉斯哥的运河中偶然发现一种保持其原有形状和速度不变，圆而光滑，轮廓分明，孤立的水波。

当时，他观察一次船的运动，这条船被两匹马拉着沿狭窄的运河迅速前进着。突然，船停了下来，而被船所推动的大堆河水却并不停止，它们积聚在船头周围激烈地扰动着。然后水浪突然呈现出一个滚圆而光滑、轮廓分明的巨大孤立波峰，它以巨大的速度向前滚动，急速地离开船头。在行进中它没有明显的形状改变和速度减小。罗素骑马追踪它，它仍以每小时 8～9 英里的速度向前滚动，并保持其原来形状，即大约 30 英尺长，1～1.5 英尺高。然而，高度逐渐减小，约在运行一、二英里后消失在河道的弯弯曲曲处。

罗素首先观察到形状和移动速度都不变的局域性水波，并首先用"孤立子"(Solitary)这个词来形容它。随后他又进行了实验研究，用重锤落入水槽的一端来产生孤波。图 5.17 就是罗素实验的示意图。



(a) 重锤落水前

(b) 重锤落水后

(c) 产生的孤波以恒定的速度向右移动并保持波形不变

图 5.17 实验示意图

他还从实验得出，孤波移动速度 c 与水槽中静止水深 d 和孤波波幅 A 之间有如下关系

$$c^2 = g(d + A)$$

由上式看出，波幅较高的孤波其移动速度也较快。不幸的是，罗素的发现在当时未能从流体力学方程给以合理的解释，因而未能引起物理学家的重视。

(2) 描述浅水波运动的 KdV 方程。罗素的发现在当时没能从流体力学方程给以合理的解释。然而，大约 40 年后，1871 年布森内斯克（M. J. Boussinesq）和 1876 年瑞利（Lord Rayleigh）假定孤波的尺度比水深大很多，他们从理想流体的运动方程导出公式 $c^2 = g(d + A)$，并推断孤波波形 $z = \xi(x, t)$ 具有如下形式

$$\xi(x, t) = A\,\text{sech}^2\beta(x - ct)$$

但他们未能给出上述孤波所满足的运动方程。直到 1895 年科特韦格（D. J. Korteweg）和德弗里斯（G. de Vries）才在浅水长波和小振幅假定下建立了单向运动的非线性浅水波运动方程。这方程可以用来描述罗素所发现的现象，即著名的 KdV 方程

$$\xi_t = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{q}{d}}\left(\frac{2}{3}\alpha\xi_x + \xi\xi_x + \frac{\sigma}{3}\xi_{xxx}\right) \tag{5.3}$$

式中 α 和 σ 为常数，σ 与表面张力有关。在长波近似下，如不计表而张力，则 $\sigma = d^3/3$，并在 $|x| \to +\infty$ 时要求 ξ 和 ξ_x 都趋于 0 的条件下求出上而方程的孤波解为

$$\xi(x, t) = A\,\text{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3A}{4d^3}}(x - ct)\right] \tag{5.4}$$

其中 $c = \sqrt{gd}\left(1 + \frac{A}{2d}\right)$。当 $A/d \ll 1$ 时，这个结果与罗素实验观察到的结果 $c^2 = g(d + A)$ 一致。理论上可由布森内斯克方程的求解得出 $c^2 = g(d + A)$。由式(5.4)可知，孤波波包的宽度与 $\sqrt{A}$ 成反比，振幅越高的 KdV 孤波宽度越窄，但移动速度越快。

经过适当的变换，KdV 方程(5.3)可化为下列标准形式：

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{5.5}$$

(3) 孤波的一个成因。波动是自然界中最常见的现象之一。电磁波、声波、水波、地震波等都是波动的现象。最典型的一维波动方程是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{5.6}$$

这里 $u(x, t)$ 是波幅，它可以是电场强度、声压、水面或者地面的高度等振动变化的物理量，c 是波速。不难证明方程(5.6)的通解为

$$u(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct)$$

$f(x-ct)$是向右传播的波，$g(x+ct)$是向左传播的波，波速都是 c。这里 $f(x-ct)$和 $g(x+ct)$称为行波解。对于方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

只有向右传播的行波解 $f(x-ct)$，而方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

则只有向左传播的行波解 $g(x+ct)$。典型的单色平面波解是

$$u(x,t)=A_0\cos(kx-\omega t)$$

这里 $k=2\pi/\lambda$ 是波矢，$\omega=2\pi f=2\pi/T$ 是圆频率，λ、f 和 T 分别是波的波长、频率和周期(对于高维系统 k 由矢量 $\boldsymbol{k}$ 代替，$\boldsymbol{k}$ 的方向是波前传播方向)，波速为

$$c=\frac{\omega}{k}$$

更复杂的波形变化可由许多具有不同振幅、波矢和频率的平面波叠加而成。波包则是由一些波矢和频率相近的波所组成，波包运动的群速度

$$c=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

它也是波的能量传输速度。

构成波包的每一个单色平面波的波前以各自的波速向前传播，可见只有当 c 与 k 无关时，波包才能保持其形状不变。显然当

$$\omega=\omega(k)$$

是 k 的非线性函数时，即 c 与 k 有关时，构成波包的不同 ω 的单色平面波的波前速度不相同，波包将逐渐变形弥散，这就是色散所引起的效应。关系式 $\omega=\omega(k)$称为色散关系。

下面我们来了解波的色散以及非线性对孤波形成的作用。以 KdV 方程(5.5)为例。如果略去方程(5.5)的非线性项，有

$$u_t+u_x+u_{xxx}=0 \tag{5.7}$$

这是一个三阶线性偏微分方程。以 $u=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$代入方程(5.7)得

$$\omega=k-k^3 \tag{5.8}$$

于是相速度 $c=\omega/k=1-k^2$ 与 k 有关，即存在色散。方程(5.8)中立方项是由方程(5.7)中对 x 的求三阶导数 u_{xxx}引起的。以速度 $v=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k=1-3k^2$ 运动的波包将因不同波长的波，其速度不同而发生色散，导致波形的弥散(只有正弦波例外，因为正弦波是单一波长的波)。

另一方面，与色散导致波形弥散相反，非线性导致波形聚拢。在 KdV 方程

中略去引起色散的对 x 的三阶导数，保留非线性项，有

$$u_t + (1+u)u_x = 0$$

显然 $u = f(x-(1+u)t)$ 是这个方程的解。此时波的相速度 $c = 1+u$，即波幅较高部分的速度比较低部分快，出现所谓"追赶"现象。其结果，在波的前沿部分波形越来越陡，形成不连续的激波，最终出现坍塌（如图 5.18，图 5.19）。

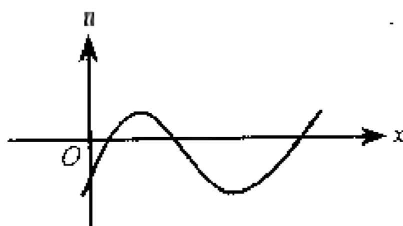


图 5.18　开始时的波形

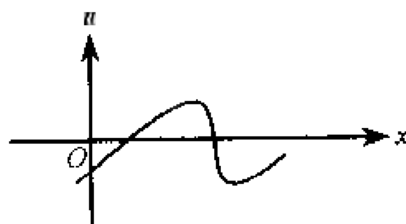


图 5.19　运动一段时间后的波形

综上所述，在 KdV 方程中，色散引起波包弥散，非线性引起波包聚集，色散与非线性平衡是形成孤波的机制。

(4) 利用同宿轨和异宿轨求解孤立波。非线性偏微系统的孤立波要满足一定的无穷边值条件：即当 $t\to\pm\infty$ 时，孤波解趋于常数（可以是相同的常数，也可以是不同的常数）。众所周知，当我们求非线性偏微分方程的行波解或波包解时，实际上是将其化为解常微分方程或常微分方程组。从前面已经知道，同宿轨和异宿轨就是当 $t\to\pm\infty$ 时，趋于常数的轨道。由此可知，这种同宿轨和异宿轨对应到该非线性偏微分方程的孤波解。下面以几个例子来说明这一点。

例 5.11　考虑著名的 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{5.9}$$

其中 $u\partial u/\partial x$ 为非线性项，$\partial^3 u/\partial x^3$ 为色散项。下面来求 KdV 方程的行波解，令

$$u = u(\xi) = u(x-ct) \tag{5.10}$$

其中常数 $c(>0)$ 为波速。从式(5.9)代入方程(5,10)得

$$\beta\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3} + u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} - c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = 0$$

将上式两边积分得

$$\beta\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{1}{2}u^2-cu=A$$

现在要求当$|x|\to 0$时，u、u_x、$u_{xx}\to 0$，则有$A=0$，从而

$$\beta\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{1}{2}u^2-cu=0$$

上式等价于下面的平面系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=v\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}=-\dfrac{1}{2\beta}u^2+\dfrac{c}{\beta}u\end{cases}\tag{5.11}$$

方程组(5.10)有两个奇点(0,0)和(2c,0)，且当$\beta>0$时，奇点(0,0)是鞍点；而当$\beta<0$时，奇点(2c,0)是鞍点。另一方面，方程组(5.11)有下列首次积分：

$$H=\frac{\beta}{2}v^2+\frac{1}{6}u^3-\frac{c}{2}u^2$$

① 当$\beta>0$时，过奇点(0,0)的轨线是

$$\frac{\beta}{2}v^2+\frac{1}{6}u^3-\frac{c}{2}u^2=0\tag{5.12}$$

该轨线是一根同宿轨如图5.20所示。

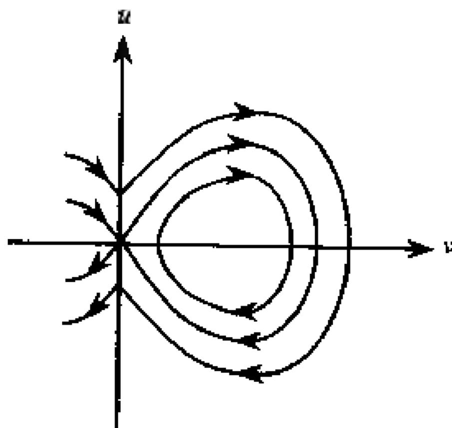


图5.20　同宿轨

由式(5.12)有

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\frac{1}{3\beta}(3cu^2-u^3)$$

由此有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\pm\frac{u}{\sqrt{3\beta}}\sqrt{3c-u}$$

两边积分得

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{3c-u}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3\beta}}\xi + u_0$$

取 $u_0 = 0$,并在上式取正号积分得

$$u(\xi) = 3c\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{c}{4\beta}}\xi$$

以 $\xi = x - ct$ 代入上式得

$$u(x,t) = 3c\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{c}{4\beta}}(x - ct)$$

这就是 KdV 方程的一个孤波解,如图 5.21 所示。

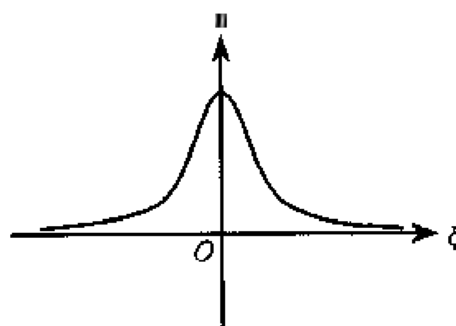


图 5.21　孤波图像

② 当 $\beta < 0$ 时,过奇点$(2c,0)$的轨线是

$$\frac{\beta}{2}v^2 + \frac{1}{6}u^3 - \frac{c}{2}u^2 = -\frac{2c^3}{3} \tag{5.13}$$

该轨线是一根同宿轨,如图 5.22 所示。

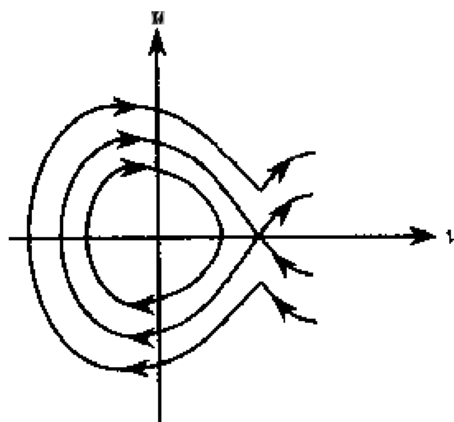


图 5.22　同宿轨

由式(5.13)有

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = -\frac{1}{3\beta}(u-2c)^2(u+c)$$

由此有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \pm\frac{(u-2c)}{\sqrt{-3\beta}}\sqrt{u+c}$$

两边积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{(u-2c)\sqrt{u+c}} = \pm\frac{1}{\sqrt{-3\beta}}\xi + u_0$$

取 $u_0=0$ 并在上式取正号积分得

$$u(\xi) = c(1-4\mathrm{sech}^2\sqrt{-\frac{c}{4\beta}}\xi)$$

以 $\xi = x - ct$ 代入上式得

$$u(x,t) = c[1-4\mathrm{sech}^2\sqrt{-\frac{c}{4\beta}}(x-ct)]$$

这就是 KdV 方程的一个孤波解，如图 5.23 所示。

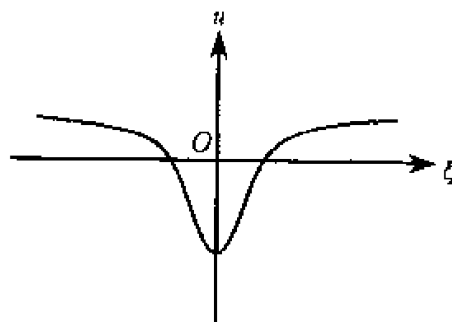


图 5.23　孤波图像

如果只要求孤波解满足初始条件，当 $|x|\to 0$ 时，u、$u_x\to 0$ 的话，那么孤波解与积分常数 A 有关，用类似的方法我们可以求出对应于同宿轨的孤波解。

下面的例子将说明怎样利用异宿轨来求孤立波。

例 5.12　考虑 Sine-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0^2\sin u = 0$$

其行波解 $u = u(\xi) = u(x-ct)$ 满足下列方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + m^2\sin u = 0$$

这里 $m^2 = \frac{f_0^2}{c^2 - c_0^2}(c^2 > c_0^2)$。上面的方程就是单摆运动方程，它等价于下面平面方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=v\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}=-m^2\sin u\end{cases}$$

该方程在$[-\pi,\pi]$内有三个奇点:中心$(0,0)$和两个鞍点$(-\pi,0)$、$(\pi,0)$,其在区间$[-\pi,\pi]$的相图我们已在例 5.4 中给出。

过两鞍点的异宿轨满足方程

$$v^2=2m^2(1+\cos u)$$

即有

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=2m^2(1+\cos u)$$

上式可化为

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\cos u}}=\pm\sqrt{2}m$$

利用初始条件当$\xi\to+\infty$时,$u\to\pi$,而当时$\xi\to-\infty$,$u\to-\pi$,我们积分上式有

$$u_{\pm}=-\pi+4\arctan e^{\pm m\xi}$$

于是得到两个孤波解:

① $u_+(x,t)=-\pi+4\arctan e^{m(x-ct)}$是扭结解(如图 5.24)。

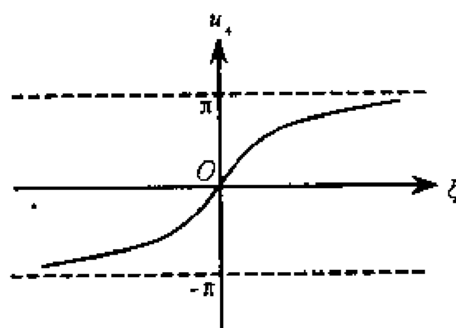


图 5.24　扭结

② $u_-(x,t)=-\pi+4\arctan e^{-m(x-ct)}$是反扭结解(如图 5.25)。

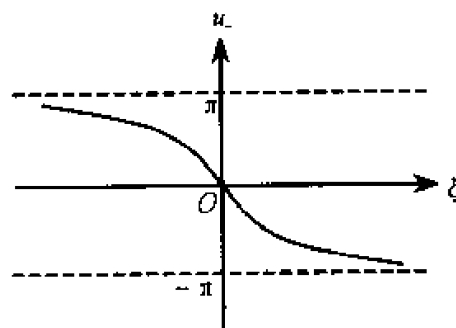


图 5.25　反扭结

下面来求解著名的非线性薛定谔方程的孤波解，它是许多物理现象的数学模型。

例 5.13 考虑非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u + |u|^2 u = 0$$

求非线性薛定谔方程的波包形式的解：

$$u = \phi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \qquad \xi = x - c_g t$$

一个直接的计算有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \left(-c_g\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} - \mathrm{i}\omega\phi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} + \mathrm{i}k\phi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + 2\mathrm{i}k\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} - k^2\phi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \\ |u|^2 u = uu^* u = \phi^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \end{cases}$$

这里 u^* 是 u 的共轭函数。将上面各式代入薛定谔方程得

$$\pm\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + \mathrm{i}(\pm 2k - c_g)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} + (\alpha + \omega \mp k^2)\phi + \phi^3 = 0$$

为了简化起见，我们让 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\xi$ 前的系数为零，即令 $k = \pm c_g/2$，于是上面方程化为

$$\pm\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + a\phi + \phi^3 = 0 \tag{5.14}$$

这里 $a = \alpha + \omega \mp \dfrac{c_g^2}{4}$。

这里有许多种情况，我们只讨论 $a<0$ 的情况，即相当于无阻尼时的 Duffing 方程。

① 如果 $\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}\xi^2$ 取“+”号，那么式(5.14)可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + a\phi + \phi^3 = 0$$

它等价于下面平面系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} = \Psi \\ \dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi} = -a\phi - \phi^3 \end{cases} \tag{5.15}$$

上面的平面系统有三个奇点：(0,0)是鞍点，$(-\sqrt{-a},0)$及$(\sqrt{-a},0)$是两个中心。该平面系统的相图与例 5.3 中所考虑的系统的相图完全相同。因此，这个系统有两根过鞍点(0,0)的同宿轨。

我们知道孤波解必须满足初始条件：当$|\xi|\to+\infty$时，$\phi(\xi)$与$\Psi(\xi)$都应趋于常数。从相图上可以看出，除同宿轨外的其他轨道都是周期轨，因此当$|\xi|\to+\infty$时，$\phi(\xi)$与$\Psi(\xi)$都不趋于任何极限，而只有同宿轨当$|\xi|\to+\infty$时，$\phi(\xi)$与$\Psi(\xi)$都趋于0(即进入奇点)。从方程组(5.15)可知同宿轨应满足下面的方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=-a\phi^2+\frac{1}{2}\phi^4=\frac{\phi^2}{2}(2|a|-\phi^2)$$

两边开方得

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}=\pm\frac{\phi}{\sqrt{2}}\sqrt{2|a|-\phi^2}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\phi\sqrt{2|a|-\phi^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\xi$$

利用积分公式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\mathrm{sech}^{-1}\frac{x}{a}+c$$

和初始条件，有

$$-\frac{1}{\sqrt{2|a|}}\mathrm{sech}^{-1}\frac{\phi}{\sqrt{2|a|}}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\xi$$

由此得

$$\phi(x,t)=\pm\sqrt{2|a|}\,\mathrm{sech}\sqrt{2}\xi=\pm\sqrt{2|a|}\,\mathrm{sech}\sqrt{a}(x-c_g t)$$

上面两式分别对应于平面相图的两条同宿轨道所表示的孤立波。

② $\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}\xi^2$ 前取“-”号，那么式(5.14)可写为

$$-\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}+a\phi+\phi^3=0$$

它等价于平面系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}=\Psi\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}=a\phi+\phi^3\end{cases}$$

它有三个奇点：(0,0)中心，$(\sqrt{-a},0)$和$(\sqrt{-a},0)$是两个鞍点。该平面系统的相图如图5.26所示。

它有两条异宿轨。对于两条异宿轨的上面一条有

$$\xi\to+\infty\qquad\phi(\xi)\to\sqrt{-a}\qquad\Psi(\xi)\to0$$

$$\xi\to-\infty\qquad\phi(\xi)\to-\sqrt{-a}\qquad\Psi(\xi)\to0$$

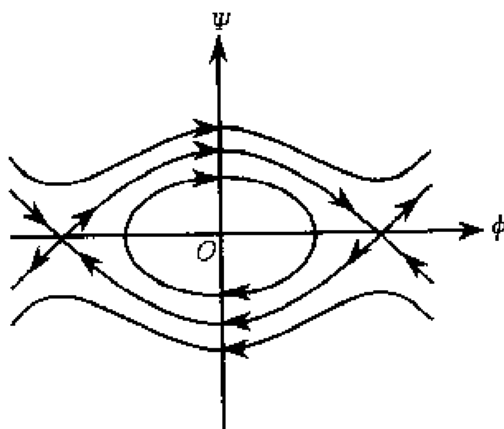


图 5.26 相图

其对应的孤波解为

$$\phi(x,t)=\sqrt{|a|}\operatorname{th}\frac{\sqrt{|a|}}{2}(x-ct)$$

而对于下面一条有

$$\xi\to+\infty\qquad\phi(\xi)\to-\sqrt{-a}\qquad\Psi(\xi)\to0$$
$$\xi\to-\infty\qquad\phi(\xi)\to\sqrt{-a}\qquad\Psi(\xi)\to0$$

其对应的孤波解为

$$\phi(x,t)=-\sqrt{|a|}\operatorname{th}\frac{\sqrt{|a|}}{2}(x-ct)$$

一般认为,孤立波仅出现在保守系统中,上面三个例子中所考虑的系统就是保守系统。但是,同(异)宿轨道在耗散系统中也广泛存在着,这就可以从广义上来讲耗散系统中也可以存在孤立波。下面将举出这方面的一个例子。

例 5.14 考虑 Burgers(伯格斯)方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

这里 $\nu>0$。显然,若无非线性项 $u\partial u/\partial x$,上面的方程是一个扩散方程,它无波动解。由于有非线性项,使扩散的东西集中,才有波动解。

Burgers 的行波解满足下面方程

$$-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\nu\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}\tag{5.16}$$

它等价于下面的平面系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=z=f(u,z)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}=\dfrac{z}{\nu}(u-c)=g(u,z)\end{cases}\tag{5.17}$$

一个直接计算得

$$\frac{\partial f(u,z)}{\partial u}+\frac{\partial g(u,z)}{\partial z}=\frac{u-c}{\nu}\neq 0$$

因此该系统是耗散。

将式(5.16)积分一次得

$$-cu+\frac{u^2}{2}-\nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\frac{A}{2}$$

A 是积分常数，于是

$$z=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{2\nu}(u^2-2cu-A)$$

从而式(5.17)可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=z\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}=\dfrac{1}{2\nu^2}(u-c)(u^2-2cu-A)\end{cases}$$

显然该系统有奇点$(u_1,0)$和$(u_2,0)$，其中 $u_1=c+\sqrt{c^2+A}$和$u_2=c-\sqrt{c^2+A}$是方程

$$u^2-2cu-A=0$$

的两个根，当 $c^2+A>0$ 时是两个实根。在这两个奇点的导算子为

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{c^2+A}{\nu^2} & 0\end{pmatrix}$$

显然当 $c^2+A>0$ 时，奇点$(u_1,0)$和$(u_2,0)$都是鞍点，并且连接这两个鞍点是两条异宿轨。其中一条异宿轨满足下列初始条件：

$$\xi\to+\infty\text{时}\qquad u\to u_1$$
$$\xi\to-\infty\text{时}\qquad u\to u_2$$

不难求得对应于这条异宿轨的孤波解为

$$u(x,t)=c+\frac{1}{2}(u_1-u_2)\mathrm{th}\,\frac{u_1-u_2}{4\nu}(x-ct)$$

其图像如图 5.27 所示。

而对于另一条异宿轨应满足下列初始条件：

$$\xi\to+\infty\text{时}\qquad u\to u_2$$
$$\xi\to-\infty\text{时}\qquad u\to u_1$$

对应于这条异宿轨的孤波解为

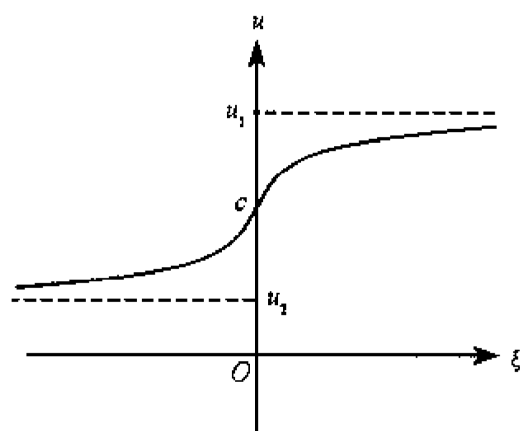


图 5.27　对应于异宿轨的孤波

$$u(x,t)=c-\frac{1}{2}(u_1-u_2)\text{th}\,\frac{u_1-u_2}{4\nu}(x-ct)$$

其图像如图 5.28 所示。

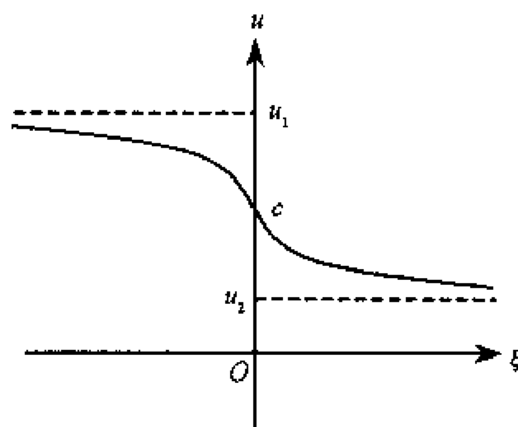


图 5.28　对应于异宿轨的孤波

事实上,求孤波解的最一般的方法是反散射方法。

5.7　异宿圈与涡旋

异宿轨与流体力学中的涡旋联系在一起,本节将以几个例子来说明这一点。

(1)湍流涡旋。众所周知,湍流和涡旋联系在一起。从形式上看,涡旋的四周速度方向是相对(相反)的,这表明流体层内有相当大的速度切变。大涡是从基本场(平均场)中获得能量,是湍流能量的主要含能涡旋,然后再通过粘性和色散因素串级分裂成小涡旋,并将能量传递给小涡,直到粘性耗散为止。

下面我们将通过相图说明异宿轨与涡旋的联系。

描述湍流的无因次形式的纳维—斯托克斯方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right)+\frac{1}{Re}\nabla \boldsymbol{v} \tag{5.18}$$

这里 $\boldsymbol{v}$ 是速度场，P 是压强，ρ 是流体密度，Re 是雷诺数，$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$。纳维—斯托克斯方程在雷诺数 Re 较大时产生湍流。而在 Re 较大时，我们可以忽略式(5.18)中右边的第二项，因而此时其近似就是欧拉方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{5.19}$$

上式可以写成下面的等价形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{v}-\nabla\left(\frac{P}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right) \tag{5.20}$$

式(5.20)中的平衡解，即满足条件

$$\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\nabla\left(\frac{P}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)$$

的解称为欧拉流(Euler flow)。由上式和式(5.20)可知，对于欧拉流有 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t=0$，因此速度场 $\boldsymbol{v}=(u,v,w)^{\mathrm{T}}$ 是定常的，而此时流体质点的运动方程可以写成下面形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u(x,y,z)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v(x,y,z)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=w(x,y,z)\end{cases} \tag{5.21}$$

其中(x,y,z)是流体质点的位置，而 $x(t)$、$y(t)$、$z(t)$是真实的质点的轨迹或流场的流线(因为是定常场，轨线和流线相重合)。

下面我们定义所谓螺度函数 h，它是速度向量 $\boldsymbol{v}$ 和旋度向量 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ 的点积，即

$$h=\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{5.22}$$

当螺度取最大值时，从式(5.22)可知速度 $\boldsymbol{v}$ 和旋度 $\boldsymbol{\omega}$ 平行，于是 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}=0$。这样式(5.20)可以化为下面的线性方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\nabla\left(\frac{P}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right) \tag{5.23}$$

因此上式的平衡解满足下面的条件

$$\nabla\left(\frac{P}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)=0 \tag{5.24}$$

我们称这种平衡解为贝切美流(Beltrami flow)。贝切美流是满足螺度最大(即 $\boldsymbol{v}$

$\times \boldsymbol{\omega} = 0$)的式(5.23)的平衡解。贝切美流是欧拉流的一种特殊情况。

例 5.15 在式(5.21)中取 $u(x,y,z) = \sin x \sin y$、$v(x,y,z) = \cos x \cos y$ 和 $w(x,y,z) = -\sin x \cos y$,那么有

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x \sin y \\ \dot{y} = \cos x \cos y \\ \dot{z} = -\sin x \cos y \end{cases} \tag{5.25}$$

很容易证

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & \omega \end{pmatrix}$$

$$= \sin x \sin y \boldsymbol{i} + \cos x \cos y \boldsymbol{j} - 2\sin x \cos y \boldsymbol{k}$$

因此方程组(5.25)是欧拉流,但不是贝切美流,因为 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 不平行。

方程组(5.25)是非线性方程组。事实上,x、y 与 z 无关。由方程组(5.25)可知,关于 x、y 的方程是

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x \sin y \\ \dot{y} = \cos x \cos y \end{cases} \tag{5.26}$$

下面我们来画方程组(5.26)的相图。方程组(5.26)有两组奇点:$(m\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$ 和$(m\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi)$(这里 $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)。

① 奇点$(m\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$的导算子为

$$\begin{pmatrix} (-1)^{m+n} & 0 \\ 0 & -(-1)^{m+n} \end{pmatrix}$$

该导算子有两个不同的实特征根 $\lambda_{1,2} = \pm 1$,因此该奇点是鞍点,在相图中用黑点表示。

② 奇点$(m\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi)$的导算于为

$$\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{m+n} \\ -(-1)^{m+n} & 0 \end{pmatrix}$$

该导算子有两个不同的特征根 $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$,因此该奇点是中心,在相图中用空心点表示。

③ 平面系统方程组(5.26)有一个首次积分

$$\sin x \cos y = h$$

显然轨线过鞍点$(m\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$时必有 $h=0$。由此可以确定所有的异宿轨如下：

$$x=k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots \text{或 } y=k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

每一直线上有无数多条异宿轨，并且每一异宿轨的走向可以从方程组(5.26)容易确定。于是我们画出方程组(5.26)的相图如图 5.29 所示。

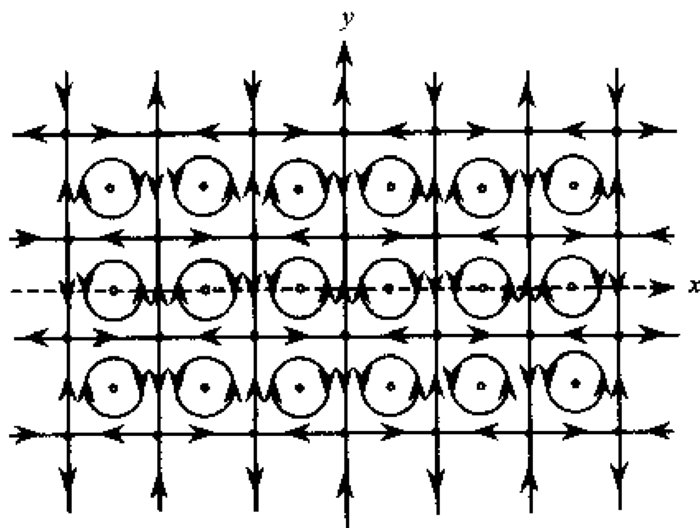


图 5.29　方程组(5.26)的相图

从相图上可以看出，涡旋是与异宿圈联系在一起的。

例 5.16　考虑著名的 ABC(Arnold-Beltrami-Childress)流，其速度场可以表示为

$$\begin{cases}\dot{x}=A\sin z+C\cos y\\ \dot{y}=B\sin x+A\cos z\\ \dot{z}=C\sin y+B\cos x\end{cases} \tag{5.27}$$

很容易证

$$\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A\sin z+C\cos y & B\sin x+A\cos z & C\sin y+B\cos x\end{pmatrix}$$

$$=(A\sin z+C\cos y)\boldsymbol{i}+(B\sin x+A\cos z)\boldsymbol{j}+(C\sin y+B\cos x)\boldsymbol{k}$$

因此方程组(5.27)是贝切美流，因为 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 平行。

在方程组(5.27)中取 $A=0$、$B=1$ 和 $C=-1$，那么方程组(5.27)可写为

$$\begin{cases}\dot{x}=-\cos y\\ \dot{y}=\sin x\\ \dot{z}=-\sin y+\cos x\end{cases}$$

在上面的非线性方程组中，x、y 与 z 无关，并且关于 x、y 的方程是

$$\begin{cases}\dot{x} = -\cos y \\ \dot{y} = \sin x\end{cases} \tag{5.28}$$

该系统的奇点为

$$(m\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

奇点 $(m\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$ 的导算子为

$$\begin{pmatrix} 0 & (-1)^n \\ (-1)^m & 0 \end{pmatrix}$$

该导算子特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{(-1)^{m+n}}$。因此当 $m+n$ 是偶数时，该奇点为鞍点；而当 $m+n$ 是奇数时，该奇点为中心。

方程组(5.28)有一个首次积分

$$\cos x - \sin y = h$$

显然轨线过鞍点 $(m\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$ 时必有 $h = 0$，因为 m、n 同为偶数或奇数。由此可以确定所有的异宿轨如下：

$$y = \pm x + 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

每一直线上有无数多条异宿轨。类似于上例，我们可以画出方程组(5.28)的相图如图 5.30 所示。

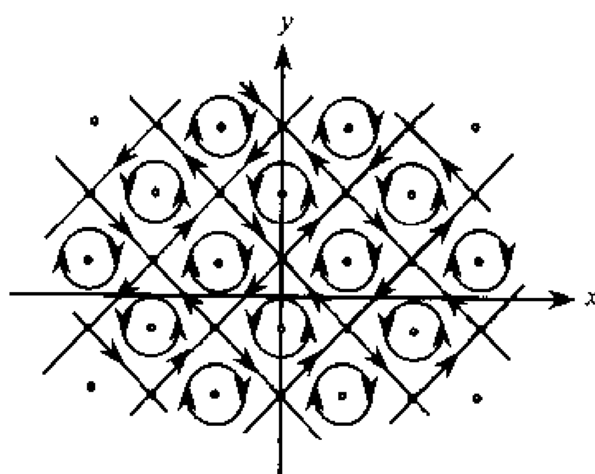


图 5.30　方程组(5.28)的相图

(2) 二维涡旋。在前面我们已经看到，异宿圈的出现导致涡旋产生。现在将欧拉方程(5.20)两边取旋度得

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega})$$

另一方面,对二维流体运动,不可压缩连续方程

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$$

可以简化为

$$\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5.29}$$

引进流函数 $\Psi = \Psi(x, y)$使得

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

以上式代入式(5.29)得

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

因此流体质点运动可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \dot{y} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \tag{5.30}$$

此时涡度可表为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{k} = \Delta_2 \Psi \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

这里 $\Delta_l = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$,这样涡度方程就变成标量方程

$$\frac{\partial \Delta_2 \Psi}{\partial t} + J(\Psi, \Delta_2 \Psi) = 0 \tag{5.31}$$

这里 $J(a, b)$定义为

$$J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}$$

式(5.31)的定常解满足下列条件

$$J(\Psi, \Delta_2 \Psi) = 0$$

即

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta_2 \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta_2 \Psi}{\partial x} = 0 \tag{5.32}$$

由上式可以看出，如果 $\Delta_2\Psi = f(\Psi)$，那么式(5.32)自然成立，其中 $f(\Psi)$是 Ψ 的任意函数。

如果取 $f(\Psi) = -\Psi$，那么式(5.31)就变为亥母霍兹方程(Helmholz)

$$\Delta_2\Psi + \Psi = 0 \tag{5.33}$$

采用变量分离法求上面线性方程，以

$$\Psi = X(x)\cdot Y(y)$$

代入上式得

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} + 1 = k^2$$

由此有

$$X'' + k^2X = 0 \qquad Y'' + (1-k^2)Y = 0$$

记 $1-k^2 = l^2$，则我们有 $k = \cos\frac{2\pi}{q}i$、$l = \sin\frac{2\pi}{q}i$。显然 $\cos kx$、$\sin kx$ 都是上面第一个微分方程的解，而 $\cos ly$、$\sin ly$ 都是上面第二个微分方程的解。因此 $\cos kx\cos ly$ 和 $\sin kx\sin ly$ 都是式(5.33)的解。由叠加原理可知 $\cos kx\cos ly - \sin kx\sin ly = \cos(kx+ly)$也是式(5.33)的解。于是对于任意正整数 q，利用叠加原理可知

$$\Psi = \frac{1}{2}\Psi_0\sum_{i=1}^{q}\cos(kx+ly) = \frac{1}{2}\Psi_0\sum_{i=1}^{q}\cos\left[x\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{q}i\right) + y\sin\left(\frac{2\pi}{q}i\right)\right] \tag{5.34}$$

是式(5.33)的解。

在上式中取 $q=2$，得 $\Psi = \Psi_0\cos x$，从而有

$$u = 0 \qquad v = -\Psi_0\sin x$$

它称为一维柯尔莫戈洛夫流。

在式(5.34)中取 $q=4$，有

$$\Psi = \Psi_0(\cos x + \cos y)$$

此时，速度场满足

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} = \Psi_0\sin y \\ \dot{y} = \dfrac{\partial\Psi}{\partial x} = \Psi_0\sin x \end{cases}$$

它的奇点是$(m\pi, n\pi)(m, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$。类似于(1)的做法可知当 $m+n$ 是偶数时，奇点$(m\pi, n\pi)$是鞍点，而当 $m+n$ 是奇数时，奇点$(m\pi, n\pi)$是中心。同样类似于(1)的做法，我们可以画出上面的平面系统的相图(如图 5.31)。

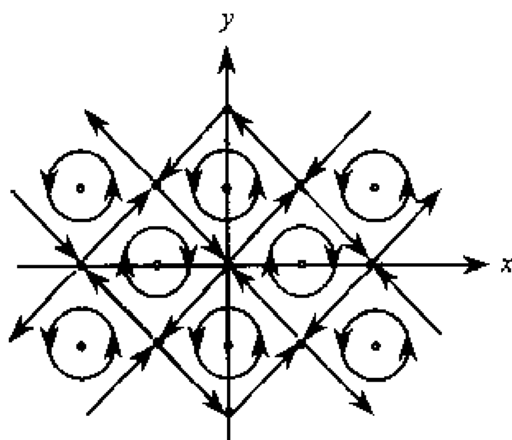


图5.31　相图

在式(5.34)中取 $q=6$,则在 $\Psi_0=1$ 时的流函数为

$$\Psi_6=\cos x+\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$$

$$=\cos x+2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}y$$

它对应的速度场为

$$\begin{cases}\dot{x}=\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\\ \dot{y}=-\sin x-\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\end{cases}$$

上面的平面系统的奇点性质如下:

① 不论 m、n 为何整数,奇点$\left((2m+1)\pi,\dfrac{(2n+1)\pi}{\sqrt{3}}\right)$是鞍点;

② 当 $m+n$ 是偶数时,奇点$\left(2m\pi,\dfrac{2n\pi}{\sqrt{3}}\right)$是中心,而当 $m+n$ 是奇数时,奇点$\left(2m\pi,\dfrac{2n\pi}{\sqrt{3}}\right)$是鞍点;

③ 不论 m、n 为何整数,奇点$\left(4m\pi\pm\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{4n\pi}{\sqrt{3}}\right)$是鞍点;

④ 不论 m、n 为何整数,奇点$\left(4m\pi\pm\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{2(2n+1)\pi}{\sqrt{3}}\right)$是鞍点。

由此不难知道系统有如图5.32所示的六角形异宿圈产生的涡旋。

事实上,二维涡旋的流场是Hamilton系统,并且 $\Psi=h_0$ 是首次积分。因此二维涡旋的流场是可积的。

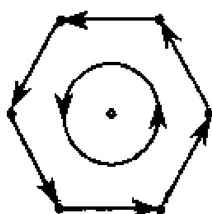


图 5.32　六角形异宿圈

(3) 三维涡旋。二维涡旋的流场是二维非线性自治系统，虽然有各种各样的涡旋图像，但它不会出现混沌。

为了研究三维涡旋，我们先介绍螺极分解。对于三维不可压缩流体有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{5.35}$$

我们可引进流函数 $\Psi=\Psi(x,y,z)$，速度势 $\phi=\phi(x,y,z)$，使得速度场 $\boldsymbol{v}=(u,v,w)$的前两个分量满足

$$u=-\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\qquad v=\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{5.36}$$

由式(5.35)和式(5.36)有

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 y}\right)=-\Delta_2\phi$$

于是如果引进对流速度势 $\chi=\int\phi\mathrm{d}z$ 或 $\phi=-\frac{\partial\chi}{\partial z}$，那么由上式有

$$w=-\int\Delta_2\phi\mathrm{d}z=\Delta_2\left(-\int\phi\mathrm{d}z\right)=\Delta_2\chi$$

将 $\phi=-\partial\chi/\partial z$ 代入式(5.36)，有

$$\begin{cases}u=-\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial z}\right)\\ v=\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial z}\right)\\ w=\Delta_2\chi\end{cases} \tag{5.37}$$

将上面方程写成向量形式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\left(-\frac{\partial\Psi}{\partial y},\frac{\partial\Psi}{\partial x},0\right)+\left(-\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial z},-\frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial z},\Delta_2\chi\right)\\&=\mathrm{rot}(-\Psi\boldsymbol{k})-\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\chi\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

上面的式子称为速度的螺极分解。

在(1)中我们已考虑了欧拉流以及贝切美流所代表的三维涡旋运动。对于贝切美流我们有 $\boldsymbol{\omega}=\lambda\boldsymbol{v}$，因此有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}=\lambda u\\
\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}=\lambda v\\
\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=\lambda w
\end{cases}
\tag{5.38}
$$

由式(5.37)有

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}-\frac{\partial^2 \chi}{\partial y\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y}-\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\partial z}\right)=\Delta_2 \Psi$$

由上式和式(5.38)的最后一个方程得

$$\Delta_2 \Psi=\lambda\Delta_2 \chi$$

显然上面的方程式有特解

$$\Psi=\lambda\chi \tag{5.39}$$

类似地，有

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\Delta\chi$$

这里 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。由式(5.37)的第一式、式(5.38)的第一式和上式有

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\Delta\chi=\lambda\left[-\frac{\partial \Psi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)\right]$$

以式(5.39)代入上式得

$$\frac{\partial}{\partial y}\Delta\chi+\lambda^2\frac{\partial \chi}{\partial y}=0$$

由此我们得到关于 χ 的亥姆霍兹方程

$$\Delta\chi+\lambda^2\chi=0 \tag{5.40}$$

类似地可以验证下列各式

$$
\begin{aligned}
&\Delta\Psi+\lambda^2\Psi=0\\
&\Delta\phi+\lambda^2\phi=0\\
&\Delta u+\lambda^2 u=0\\
&\Delta v+\lambda^2 v=0\\
&\Delta w+\lambda^2 w=0
\end{aligned}
$$

以及

$$\Delta \boldsymbol{v}+\lambda^2\boldsymbol{v}=0$$

在直角坐标系中，在亥姆霍兹方程(5.40)中取 $\lambda=\sqrt{2}$时的一个特解为

$$\chi=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\cos y$$

从而

$$\Psi = \sqrt{2}\chi = \sin x \cos y$$

于是

$$u = \sin x \sin y$$
$$v = \cos x \cos y$$
$$w = -\sqrt{2} \sin x \cos y$$

这是贝切美流,流体质点运动方程的相图与例 5.15 中给出的相图相同。

如果取

$$\Psi = \chi = Ax\cos z - B\cos x - C\sin y$$

那么

$$\begin{cases} u = A\sin z + C\cos y \\ v = B\sin x + A\cos z \\ w = C\sin y + B\cos x \end{cases}$$

流体质点运动方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = A\sin z + C\cos y \\ \dot{y} = B\sin x + A\cos z \\ \dot{w} = C\sin y + B\cos x \end{cases}$$

它就是著名的 ABC 流,在例 5.16 中给出了一种有涡旋特殊情况,其实这个系统在一些参数值上可出现混沌。

最后,我们取

$$\chi = \left(\cos x + 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\sin z$$

那么流体质点运动方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\cos z \\ \dot{y} = -\left(\sin x + \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)\cos z \\ \dot{z} = \left(\cos x + 2\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)\sin z \end{cases}$$

在上面方程组的前两个方程中作变量替换 $d\tau = \cos z dt$ 得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ \dfrac{dy}{d\tau} = -\sin x - \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

在前面我们已经知道这个平面系统有涡旋。

5.8　闭轨和 Poincare 映射及其应用

在这一节，我们用几何观点来描述闭轨的稳定性。这里描述闭轨的稳定性的工具是 Poincare 映射。用 Poincare 映射描述闭轨的稳定性是十分重要的，以后我们也会看到 Poincare 映射与混沌也有联系。

下面我们首先定义 Poincare 映射。考虑自治常微分方程组

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in \mathbf{R}^n \tag{5.41}$$

这里 $f: U \to \mathbf{R}^n$ 是 C^r 的，$U \subset \mathbf{R}^n$ 是开集。设 $\phi(t, x)$是方程(5.41)的流，那么过 x_0 点周期为 T 的轨道 $\phi(t, x_0)$满足下列条件

$$\phi(t + T, x_0) = \phi(t, x_0)$$

设 Σ 是过点 x_0 并且与过 x_0 的轨线 $\phi(t, x_0)$横截相交的 $n-1$ 维曲面(如图 5.33)，即有 $\boldsymbol{n}(x_0) \cdot f(x_0) \neq 0$，这里 $\boldsymbol{n}(x_0) = (n_1(x_0), \cdots, n_n(x_0))^{\mathrm{T}}$ 是 Σ 在 x_0 点的法向量，并且

$$f(x_0) \cdot \boldsymbol{n}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_0) n_i(x_0)$$

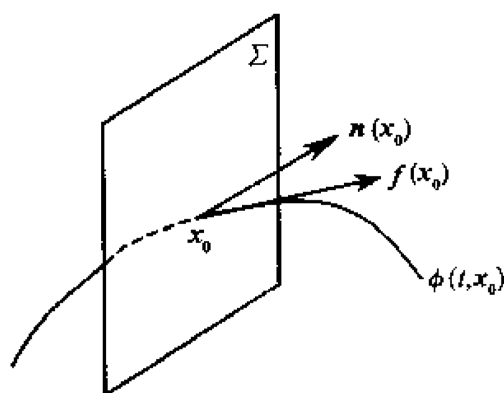


图 5.33　横截示意图

由连续性定理，可以找到一个包含 x_0 点的开集 $V \subset \Sigma$ 使得从 V 中出发的轨线在时间接近于 T 时返回 Σ。设 $\tau(x)$是从 $x \in V$ 出发的轨线 $\phi(t, x)$第一次返回 Σ 的时间，那么第一次返回 Σ 的点的坐标为 $\phi(\tau(x), x)$，如图 5.34 所示。

我们定义 Poincare 映射如下

$$P: V \to \Sigma$$
$$x \to \phi(\tau(x), x)$$

Poincare 映射与闭轨有密切的联系。为了描述这种联系，我们先给出两个定

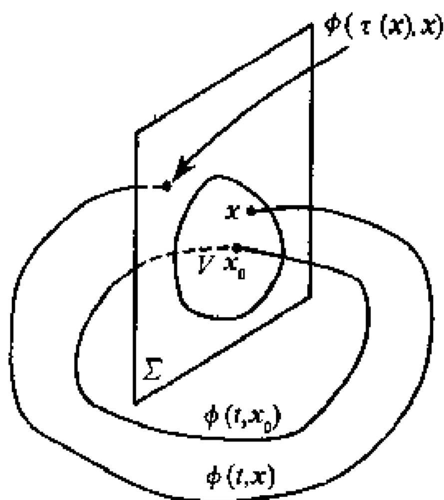


图 5.34 第一次返回

义。

定义 5.10 设 $f: U \to \mathbf{R}^n$ 是一个映射(这里 $U \subseteq \mathbf{R}^n$ 是开集),我们称满足 $f(x)=x$ 的点 x 为映射 f 的不动点。

定义 5.11 设 $f: U \to \mathbf{R}^n$ 是一个映射(这里 $U \subseteq \mathbf{R}^n$ 是开集),且 $f^i(x) \in U$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$,我们称满足 $f^k(x)=x$ 但 $f^{k-1}(x) \neq x$ 的点 x 为映射 f 的周期为 k 的点。

显然,Poincare 映射的不动点是周期为 1 的点。不动点与 Σ 只有一个交点,而周期为 k 的点与 Σ 有 k 个交点,即从周期为 k 的点 x 出发的轨线在与 Σ 相交 $k-1$ 次后返回点 x(如图 5.35,图 5.36)。

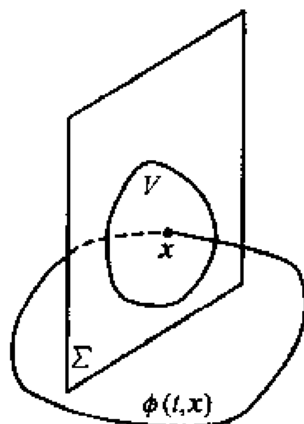


图 5.35 x 是不动点

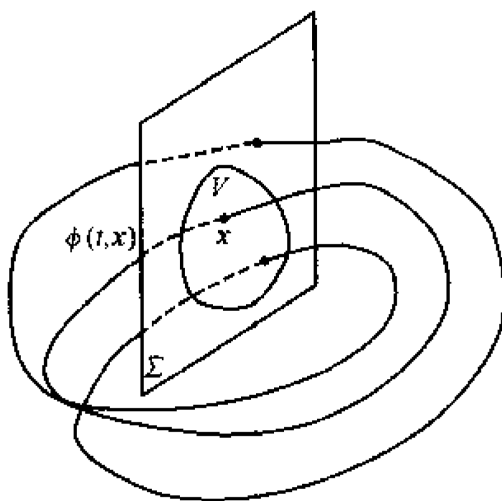


图 5.36　x 是周期为 3 的点

例 5.17　考虑二维系统

$$\begin{cases}\dot{x}=ux-y-x(x^2+y^2)\\ \dot{y}=x+uy-y(x^2+y^2)\end{cases}\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2$$

这里 $u\in\mathbf{R}$ 是参数。

在极坐标系下，上面的方程组可化为

$$\begin{cases}\dot{r}=ur-r^3\\ \dot{\theta}=1\end{cases}\tag{5.42}$$

这是一个变量已分离的方程组，容易计算，在 $t=0$ 时，过点 $(\gamma(0),\theta(0))=(\gamma_0,\theta_0)$ 的解为

$$(r(t),\theta(t))=\left(\left[\frac{1}{u}+\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{u}\right)e^{-2ut}\right]^{-\frac{1}{2}},t+\theta_0\right)$$

由此可知该系统的流为

$$\phi:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+\times S^1\to\mathbf{R}^+\times S^1$$

$$t\to\phi(t,(r,\theta))$$

$$\phi(t,(r,\theta))=\left(\left[\frac{1}{u}+\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{u}\right)e^{-2ut}\right]^{-\frac{1}{2}},t+\theta\right)$$

这个流有一根周期轨

$$\phi(t,\sqrt{u},\theta))=(\sqrt{u},t+\theta)$$

即 $r^2=u$ 是周期轨，其周期为 $T=2\pi$。

为了定义系统的 Poincare 映射，我们选取横截面如图 5.37 所示的 Σ，即

$$\Sigma=\{(r,\theta)\in\mathbf{R}^+\times S^1\mid\theta=\theta_0\}$$

这里 θ_0 是一个确定的常数。显然 Σ 是圆柱面上一条直线，其上每一点的法矢

量为 $\boldsymbol{n}=(0,1)$。

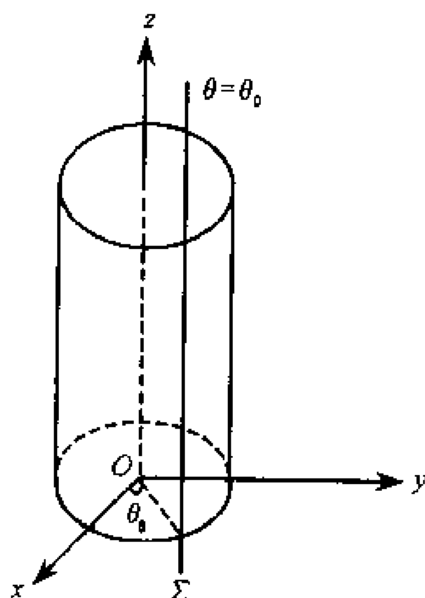


图 5.37 取 Σ 是直线 $\theta=\theta_0$

由于方程组(5.42)在任一点的切向量为$(ur-r^3,1)$,那么显然有

$$(ur-r^3,1)\cdot(0,1)=1\neq 0$$

这就证明了过 Σ 上任一点的轨线都与其横截相交。

由于 $\theta=t+\theta_0$,因而 $\omega=1$,这就说明从 Σ 上任一点出发的轨线第一次返回 Σ 的所需时间是 2π(如图 5.38)。

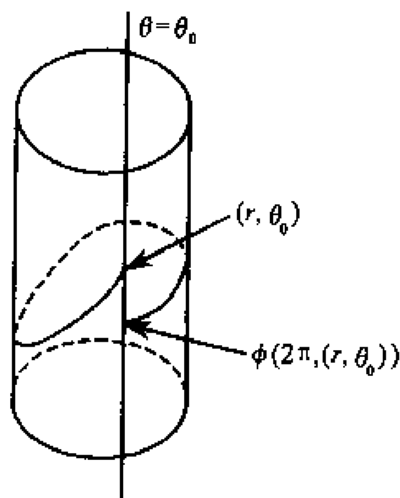


图 5.38 第一次返回

于是我们可以定义 Poincare 映射如下:

$$P:\Sigma\to\Sigma$$
$$(r,\theta_0)\to\phi(2\pi,(r,\theta_0))$$

$$P(r,\theta_0)=\phi(2\pi,(r,\theta_0))=\left(\left[\frac{1}{u}+\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{u}\right)e^{-4\pi u}\right]^{-\frac{1}{2}},\theta+2\pi\right)$$

由于在 Σ 上，$\theta\equiv\theta_0+2\pi(\bmod 2\pi)$，于是上面的 Poincare 映射可改写为

$$P(r)=\left[\frac{1}{u}+\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{u}\right)e^{-4\pi u}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

容易计算 $P(r)=r$ 有唯一解 $r=\sqrt{u}$。

闭轨与 Poincare 映射的周期点密切相关，现在的问题是：是否可以利用 Poincare 映射判断闭轨的稳定性？下面我们就来回答这一问题。

定义 5.12　设 x_0 点是 Poincare 映射的一个不动点。如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\varepsilon$ 时，有

$$|P(x)-x_0|<\delta$$

那么我们称 x_0 点是稳定的不动点。

我们将 $P(x)$ 在 x_0 点附近作泰勒展开得

$$\begin{aligned}P(x)&=P(x_0)+DP(x_0)\cdot(x-x_0)+O(|x-x_0|^2)\\&=x_0+DP(x_0)\cdot(x-x_0)+O(|x-x_0|^2)\end{aligned}$$

因此有

$$P(x)-x_0=DP(x_0)\cdot(x-x_0)+O(|x-x_0|^2)$$

由上式可知，Poincare 映射在 x_0 点的稳定性由导算于 $DP(x_0)$ 决定。

定理 5.1　设 x_0 是 Poincare 映射 P 的不动点，并且 P 在 x_0 的导算子 $DP(x_0)$ 的所有特征值的模小于 1，那么 x_0 点是稳定的不动点。

定理 5.2　设 x_0 是 Poincare 映射 P 的不动点，并且 $DP(x_0)$ 至少有一个特征值的模大于 1，那么 x_0 是不稳定的不动点。

我们不在这里给出这两个定理的证明。

下面的问题是：怎么定义 Poincare 映射周期为 k 的点的稳定性呢？我们知道，若 x_0 是 Poincare 映射 P 的周期为 k 的点，那么 x_0 是 P^k 的不动点。于是可以按下面方式定义周期为 k 的点的稳定性。

定义 5.13　设 x_0 是 Poincare 映射 P 的周期为 k 的点，如果 x_0 是 P^k 的稳定不动点，那么称 x_0 是 P 的稳定的周期为 k 的周期点。

现在我们要问：是否可以用 Poincare 映射的不动点或周期点的稳定性来判断他们对应的周期轨的稳定性呢？下面的定理就回答了这个问题。

定理 5.3　设 x_0 是 Poincare 映射 P 的稳定不动点或稳定周期点，那么过 x_0 的周期轨也是稳定的，并且是渐近稳定的。

例5.17中的Poincare映射在 $r_0=\sqrt{u}$ 处的导算子为

$$DP(r_0)=(e^{-4\pi u})$$

其特征值为 $\lambda=e^{-4\pi u}$，且当 $u>0$ 时 λ 的模 $|\lambda|=e^{-4\pi u}<1$，因此 $r_0=\sqrt{u}$ 是渐近稳定闭轨。

从上面的内容可以看出，Poincare映射对闭轨存在性和稳定性的研究起着重要作用。现在需要回答下列问题：怎么选择横截面 Σ？对于这个问题，我们只能部分地回答。

下面我们对一类非自治系统介绍Poincare映射构造方法。考虑非自治系统

$$\dot{x}=f(x,t)\quad x\in\mathbf{R}^n \tag{5.43}$$

这里 $f:U\to\mathbf{R}^n$ 是 C^r 的，$U\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$ 是开集。我们假定 f 关于时间 t 是周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 的函数，即

$$f(x,t)=f(x,t+T)$$

为了方便起见，将系统(5.43)提升为 $n+1$ 维系统。为此，我们定义映射

$$\theta:\mathbf{R}^1\to S^1$$

$$t\to\theta(t)=\omega t(\mathrm{mod}2\pi)$$

因此系统(5.43)等价于下列 $n+1$ 维系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,\theta)\\ \dot{\theta}=\omega\end{cases}\quad (x,\theta)\in\mathbf{R}^n\times S^1 \tag{5.44}$$

设 $(x(t),\theta(t))$ 是在 $t=0$ 时系统(5.44)过点 (x,θ) 的解，则由系统(5.44)生成的流为

$$\phi(t,(x,\theta))=(x(t),\theta(t))=(x(t),\omega t+\theta(\mathrm{mod}(2\pi))$$

定义

$$\Sigma^{\theta_0}=\{(x,\theta)\in\mathbf{R}^n\times S^1\,|\,\theta=\theta_0\}$$

显然 Σ^{θ_0} 在任一点的法线方向为 $\boldsymbol{n}=(\mathbf{0},1)$，因此

$$(f(x,\theta),1)(\mathbf{0},1)=1\neq0$$

从方程组(5.44)可知，Σ^{θ_0} 上任一点出发的轨线第一次返回 Σ^{θ_0} 所需的时间为

$$\tau(x,\theta_0)=\frac{2\pi}{\omega}$$

于是可以定义Poincare映射为

$$P:\Sigma^{\theta_0}\to\Sigma^{\theta_0}$$

$$(x,\theta_0)\to\phi(\tau(x),x,\theta_0)=\phi\left(\frac{2\pi}{\omega},(x,\theta_0)\right)$$

而 $\phi\left(\frac{2\pi}{\omega},(x,\theta_0)\right)=\left(x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right),T+\theta_0\right)$，从面有

$$P(\boldsymbol{x},\theta_0)=\left(\boldsymbol{x}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right),T+\theta_0\right)$$

显然在柱面上，θ_0 与 $T+\theta_0$ 是同一个点，于是我们可以把 Poincare 映射 P 改写为

$$P(\boldsymbol{x}(0))=\boldsymbol{x}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$$

因为 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}$。

例 5.18 考虑二维系统

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2\\ \dot{\theta}=1\end{cases}$$

容易计算得

$$\phi(t,(x,\theta))=\left(\left[\frac{1}{x}-t\right]^{-1},t+\theta\right)$$

$$P(x)=\left(\frac{1}{x}-2\pi\right)^{-1},x\in\left(-\infty,\frac{1}{2\pi}\right)$$

下面我们将给出一个关于 Poincare 映射应用的例子。

例 5.19 考虑强迫线性振动系统

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+x=r\cos\omega t \qquad 0\leqslant\beta<1 \tag{5.45}$$

它等价于平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x-2\beta y+r\cos\omega t\end{cases}$$

将上面系统提升为三维系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x-2\beta y+r\cos\omega\theta\\ \dot{\theta}=1\end{cases} \tag{5.46}$$

系统(5.45)是一个线性方程，我们用常数变易法容易求得它的通解为

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}(c_1\cos\bar{\omega}t+c_2\sin\bar{\omega}t)+A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

这里 $\bar{\omega}=\sqrt{1-\beta^2}$，$A$ 和 B 是特解系数：

$$A=\frac{(1-\omega^2)r}{(1-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2} \qquad B=\frac{2\beta\omega r}{(1-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}$$

而积分常数 c_1 和 c_2 由初始条件决定。

设 $x(0)=x_0$，$y(0)=y_0$，那么有

$$\begin{cases}C_1+A=x_0\\ -\beta c_1+\bar{\omega}c_2+\omega\beta=y_0\end{cases}$$

由此有

$$\begin{cases} c_1 = x_0 - A \\ c_2 = [y_0 + \beta(x_0 - A) - \omega B]/\omega d \end{cases}$$

因此,系统(5.46)的流为

$$\phi(t,(x_0,y_0,\theta_0)) = (x(t),y(t),t+\theta_0) = (x(t),\dot{x}(t),t+\theta_0)$$

这里

$$y(t) = \dot{x}(t) = e^{-\beta t}[-\beta(c_1\cos\bar{\omega}t + c_2\sin\bar{\omega}t) + \bar{\omega}(-c_1\sin\bar{\omega}t + c_2\cos\bar{\omega}t)] - \omega(A\sin\omega t - B\cos\omega t)$$

由此可知 Poincare 映射为

$$P(x_0,y_0) = ((x_0 - A)e^{-2\pi\beta/\omega},(y_0 - \omega B)e^{-2\pi\beta/\omega} + \omega B)$$

由 $P(x_0,y_0) = (x_0,y_0)$得到 Poincare 映射的不动点为

$$x_0 = A \qquad y_0 = \omega B$$

容易计算 Poincare 映射在不动点的导算子为

$$DP(A,\omega B) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p_1}{\partial x_0} & \dfrac{\partial p_1}{\partial y_0} \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial x_0} & \dfrac{\partial p_0}{\partial y_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi\beta/\omega} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi\beta/\omega} \end{pmatrix}$$

当 $\omega\beta > 0$ 时,该矩阵的两个特征值的模都小于 1,因此 Poincare 映射的不动点是稳定的,由此可知其对应的闭轨是渐近稳定的(如图 5.39)。

从这个例子可以看出,由 Poincare 映射可以容易地确定闭轨的存在性以及稳定性。

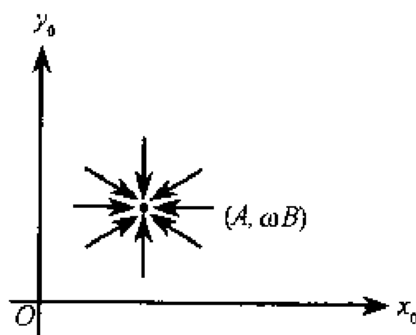


图 5.39 Poincare 映射的稳定不动点

思考题

1. 画出系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay - bxy \\ \dot{y} = cx + \dfrac{b}{2}y^2 \end{cases} \qquad (a, b, c > 0)$$

的平面相图。

2. 画出系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda y + xy \\ \dot{y} = \lambda x + \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2) \end{cases}$$

当 $\lambda > 0$ 时的平面相图。

3. 求 KdV 方程满足边值条件 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} u(x, t)$ 是常数的孤立波解 $u(x, t) = g(x - ct)$。

4. 求方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u + u^2 + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ 满足边值条件 $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x, t)$ 是常数的孤立波解 $u(x, t) = g(x - v_0 t)$。

5. 在 ABC 流中找出具有涡旋现象的几组不同参数值，并画出此时的平面相图。

6. 考虑你正在从事研究方向的一个实际非线性动力学模型，用本章的知识研究其动力学行为。

第六章 分 叉

在前面我们已经了解了许多基本概念，如奇点、闭轨、奇点稳定性和闭轨稳定性，还有同宿轨与异宿轨等。下面我们将会看到动力系统的分叉与这些基本概念密切相关。在数学上，分叉是用向量场的结构稳定性来定义的。而向量场的结构稳定性是用拓扑知识来定义的，我们不在这里给出，读者可以在有关微分动力系统的书中找到这方面的知识。分叉与结构不稳定性相联系。在数学上已证明：如果一个常微分方程组或向量场存在非双曲奇点，那么它是结构不稳定的。

6.1 分叉的基本概念

在这里，我们不用结构稳定性来定义常微分方程组或向量场的分叉，采用直观而在数学上来讲不那么严格的分叉定义。

定义 6.1 在含参数的系统中，如果参数值连续变化到某一值时系统的定性行为或定量行为发生了质的变化时，我们就称该系统发生了分叉，发生这种变化的任一组参数值称为分叉点。

下面我们给出一个从数学上更好操作的分叉定义。

定义 6.1′ 考虑含参数的常微分方程组

$$\dot{x}=f(x,u) \qquad x\in\mathbf{R}^n, u\in J\subseteq\mathbf{R}^n \tag{6.1}$$

其中 J 是开集，x 是状态变量，u 称为分叉参数(也称为“控制变量”)。当参数 u 连续地变动且通过 $u_0\in J$ 时，如果系统(6.1)的定性行为或定量行为发生了突然变化，则称该系统在 u_0 处发生了分叉，u_0 称为分叉值。全体分叉值组成的集合称为该系统在参数空间中的分叉集。

为了清楚地描述由分叉引起的定量或定性行为的变化，我们可以在(x,u)空间中画出该系统的定性或定量行为随着参数 u 的变化而变化的图形，这种图称为分叉图。

下面我们介绍一些经典的分叉例子。

1. 奇点分叉

对于含参数的微分方程组(6.1)，其奇点是由代数方程组

$$f(x,u)=0$$

决定的,其解 $x_0 = x_0(u)$与参数 u 有关,因而其导算子 $Df[x_0(u)]$也与 u 有关,于是其特征值也与 u 有关。由第三章的中心流形理论,我们有下列三种情况:

(1) 若导算子 $Df[x_0(u)]$的所有特征值的实部都小于零,则该奇点是稳定的"汇";

(2) 若导算子 $Df[x_0(u)]$的所有特征值的实部都不等于零,并且其中至少有一个特征值的实部大于零,则该奇点是不稳定的双曲奇点;

(3) 若导算子 $Df[x_0(u)]$的所有特征值中至少有一个特征值的实部等于零,则该奇点是非双曲奇点。由中心流形定理,此时在该奇点附近的几何结构最有可能发生变化,因而奇点分叉只能在这种情况发生。

由上面可知,对于一个包含参数 u 的常微分方程组来说,当控制参数 u 发生变化时常常就可能引起系统的导算子的特征值随之发生变化。特别是当出现有特征值实部为零的情况,这就引起了结构稳定性的改变,从而将出现分叉。

若从导算子的特征值的角度看,参数 u 变化时,可能出现 $\mathrm{Re}\lambda = 0$ 的情况有三种:

① 特征值沿复平面($\mathrm{Re}\lambda$, $\mathrm{Im}\lambda$)的实轴穿过虚轴,这种情形称为叉型分叉(如图 6.1);

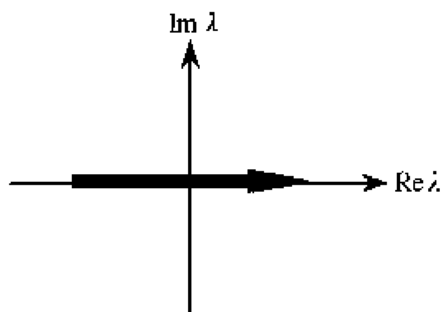


图 6.1　叉型分叉

② 特征值沿复平面($\mathrm{Re}\lambda$, $\mathrm{Im}\lambda$)的上方或下方穿过虚轴,这种情形称为 Hopf 分叉(如图 6.2);

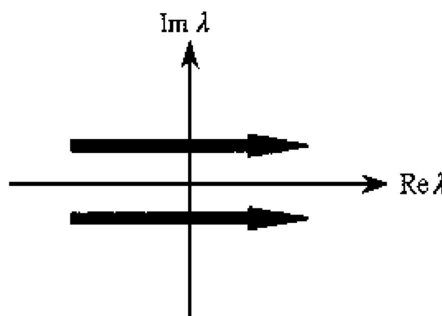


图 6.2　Hopf 分叉

③ 特征值沿复平面(Reλ，Imλ)的实轴两边趋向于虚轴，这种情况称为鞍结分叉(如图6.3)。

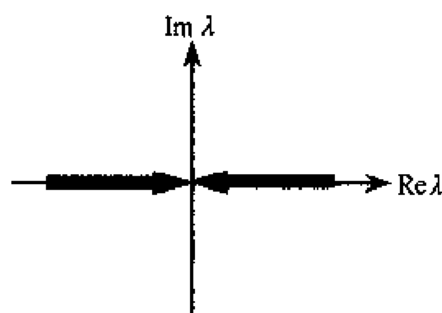


图6.3 鞍结分叉

例6.1 考虑一维系统

$$\dot{x}=ux-x^3=x(u-x^2)\equiv f(x,u)$$

显然该系统的奇点情况如下：

① 当 $u<0$ 时，该系统只有唯一的奇点 $x_0=0$，其导算子 $Df(0)=(u)$ 的特征值是 $\lambda=u$。因此，该奇点是稳定的。

② 当 $u>0$ 时，该系统有三个奇点：$x_0=0$，$x_1=-\sqrt{u}$ 和 $x_2=\sqrt{u}$。显然 $x_0=0$ 是不稳定奇点；$x_1=-\sqrt{u}$ 和 $x_2=\sqrt{u}$ 的导算子是 $Df(\pm\sqrt{u})=-2u$，由此可知这两个奇点是稳定的。于是该系统的分叉图如图6.4所示(图中实线代表稳定，虚线代表不稳定)。

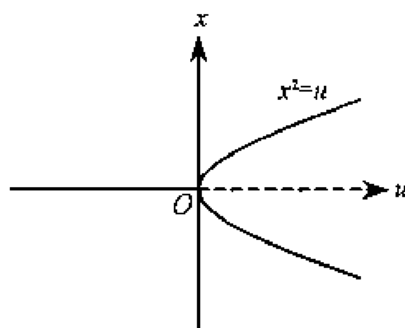


图6.4 叉型分叉

$u=0$ 是一个分叉点。

例6.2 考虑平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+x[u-(x^2+y^2)]\\ \dot{y}=x+y[u-(x^2+y^2)]\end{cases}$$

该系统只有一个奇点(0,0)，其导算子为

$$\begin{pmatrix} u & -1 \\ 1 & u \end{pmatrix}$$

导算子的两个特征根为 $\lambda_1 = u + \mathrm{i}$、$\lambda_2 = u - \mathrm{i}$。显然,当参数 u 由负变到正时,λ 沿实轴上方或下方穿过虚轴,奇点(0,0)由稳定的焦点($u<0$)变为不稳定的焦点($u>0$),这个系统在 $u=0$ 处发生了 Hopf 分叉。

事实上,这个系统不只发生了奇点分叉,而且也产生闭轨分叉。

令 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$,则原方程组可写为

$$\begin{cases} \dot{r} = r(u - r^2) = f(r, u) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

上面的第二个方程表示轨线以角速度 $\omega = 1$ 旋转。而对于第一个方程,我们有

① 当 $u \leqslant 0$ 时,只有唯一奇点 $r_1 = 0$,并且是稳定的焦点;

② 当 $u > 0$ 时,该方程有一个奇点 $r_1 = 0$ 和一条闭轨 $r_2 = \sqrt{u}$,并且 $r_1 = 0$ 是不稳定焦点,而 $r_2 = \sqrt{u}$ 是稳定的极限环。

该系统的分叉图如图 6.5 所示。

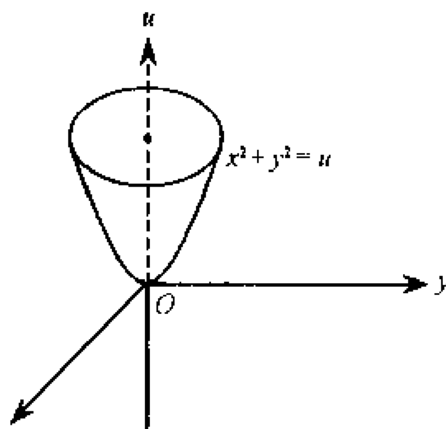


图 6.5 Hopf 分叉

例 6.3 考虑平面系统

$$\begin{cases} \dot{x} = u + x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

显然,当 $u > 0$ 时,该系统无奇点;而当 $u < 0$ 时,系统有两个奇点 $(x_\pm, y_\pm) = (\pm\sqrt{-u}, 0)$,它们相应的导算子分别为

$$\begin{pmatrix} \pm 2\sqrt{-u} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

它们的导算子的特征值分别为 $\lambda_\pm = \pm 2\sqrt{-u}$、$\lambda_\pm = -1$。由此可知,

$(\sqrt{-u},0)$是鞍点，而$(-\sqrt{u},0)$是稳定的结点(如图 6.6)。

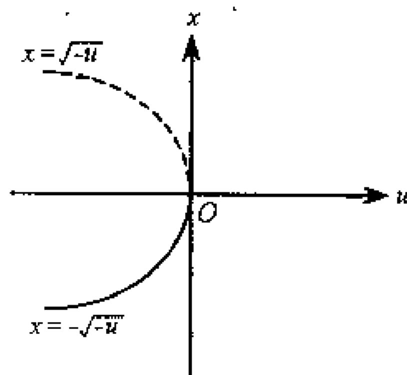


图 6.6　鞍结分叉

事实上，这个系统的平面相图更能反映整个分叉过程如图 6.7，图 6.8，图 6.9 所示。

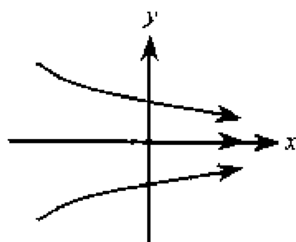


图 6.7　$u>0$ 时的相图

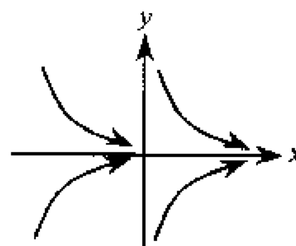


图 6.8　$u=0$ 时的相图

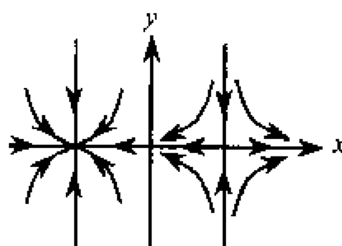


图 6.9　$u<0$ 时的相图

除了前面提到的叉型分叉，Hopf 分叉和鞍结分叉三种基本的奇点分叉外，

还有另外三种基本的奇点分叉情况:超临界分叉、亚临界分叉和跨临界分叉。

现在我们考虑单参数系统:设 $u \in \mathbf{R}$ 是系统的分叉参数,u_0 是系统的一个分叉点。若当 $u < u_0$ 时,奇点的一个分支是稳定的,且当 $u = u_0$ 时奇点变成不稳定的,而当 $u > u_0$ 时奇点又是稳定的,此时称该系统在 $u = u_0$ 处发生了超临界分叉;若 $u > u_0$ 时,奇点是不稳定的,则称该系统在 $u = u_0$ 处发生了亚临界分叉。

例 6.4 考虑如下系统

$$\dot{x} = x^3 + ux$$

显然有下列结论:

① 当 $u > 0$ 时,系统只有一个不稳定奇点 $x_0 = 0$;

② 当 $u < 0$ 时,系统有三个奇点:$x_0 = 0$ 是稳定奇点,$x_{1,2} = \pm\sqrt{-u}$ 是不稳定奇点。

该系统的分叉图如图 6.10 所示。

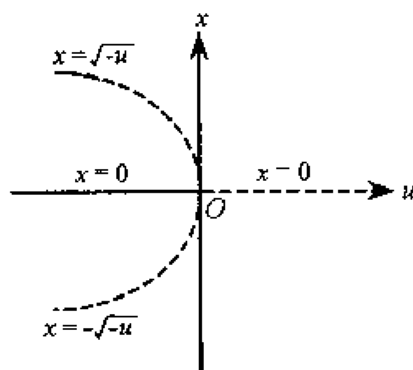


图 6.10 亚临界分叉

这是叉形分叉,而且是亚临界分叉。

例 6.5 考虑一维系统

$$\dot{x} = x(u - x)$$

显然,只要 $u \neq 0$,系统就有两个奇点 $x_0 = 0$ 和 $x_1 = u$。

① 当 $u < 0$ 时,奇点 $x_0 = 0$ 是稳定的,而奇点 $x_1 = u$ 是不稳定的;

② 当 $u > 0$ 时,奇点 $x_0 = 0$ 是不稳定的,而奇点 $x_1 = u$ 是稳定的。

该系统的分叉图如图 6.11 所示。

从这个分叉图上可以看出:这是亚临界分叉,并且通过分叉点时稳定发生了交换,而形态没有变化,这种分叉称为跨临界分叉。

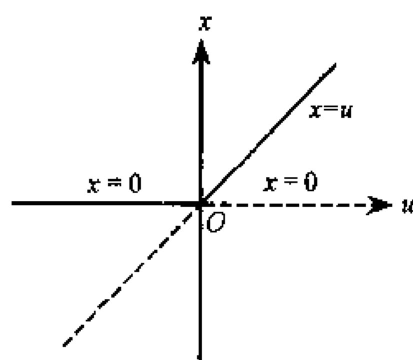


图 6.11 跨临界分叉

例 6.6 考虑一维二次系统

$$\ddot{x}=\sin x(\alpha\cos x-1) \qquad -\pi/2<x<\pi/2$$

如果令 $\dot{x}=y$，则上面的方程等价于下列方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=\sin x(\alpha\cos x-1)\end{cases}$$

对于上面的方程组，有

① 当 $\alpha\geqslant 1$ 时，该系统有两个奇点 $(0,0)$、$(\arccos 1/\alpha,0)$；

② 当 $\alpha<1$ 时，系统只有一个奇点 $(0,0)$。

显然，奇点 $(0,0)$ 的导算子为

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \alpha-1 & 0\end{pmatrix}$$

于是，当 $\alpha<1$ 时，奇点 $(0,0)$ 是稳定的焦点，而当 $\alpha>1$ 时，奇点 $(0,0)$ 是鞍点。而对于奇点 $(\arccos 1/\alpha,0)(\alpha>1)$，其导算子为

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{1}{\alpha}-\alpha & 0\end{pmatrix}$$

由此可以判断该奇点是稳定的焦点。于是我们可以画出该系统的分叉图（如图 6.12）。

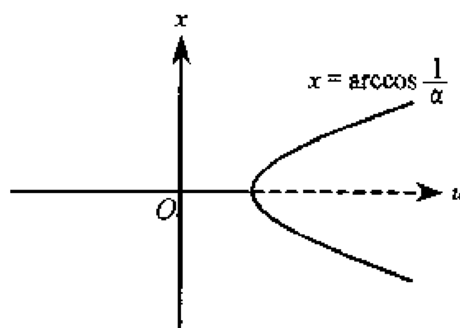


图 6.12 叉型分叉

2. 闭轨分叉

所谓闭轨分叉是指当分叉参数变化到某一参数值时，系统的闭轨的个数发生了变化。事实上，例(6.2)就是闭轨分叉的一个例子。从这个例子可以看出：当参数 u 从小于零连续变化并经过 $u=0$ 后，系统从没有闭轨到有一个闭轨。

例 6.7　考虑二维系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+x[u+(x^2+y^2)]\\ \dot{y}=x+y[u+(x^2+y^2)]\end{cases}$$

显然，该系统有唯一奇点(0,0)。当 $u<0$ 时，奇点(0,0)是稳定焦点，而当 $u>0$ 时，奇点(0,0)是不稳定焦点。另外，当 $u<0$ 时，该系统有一个不稳定的极限环 $x^2+y^2=-u$。该系统的分叉图如图 6.13 所示。

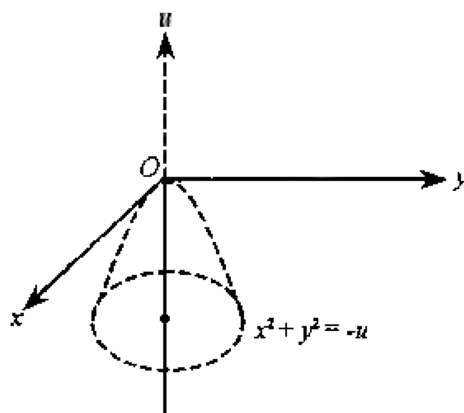


图 6.13　亚临界 Hopf 分叉

从这个分叉图上可以看出：当 $u<0$ 时，系统有一个稳定奇点和一个不稳定极限环，而通过分叉点 $u=0$ 后，奇点变为不稳定了，而极限环消失了。我们称这种分叉为亚临界 Hopf 分叉。

例 6.8　考虑单自由度振动系统

$$\ddot{x}-u\dot{x}+\dot{x}^3+x=0\qquad x\in\mathbf{R},u\in\mathbf{R}$$

它等价于平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y\\ \dot{y}=x+uy-y^3\end{cases}\qquad (x,y)\in\mathbf{R}^2$$

上面的平面系统只有唯一的奇点(0,0)，且有

① 当 $u<0$ 时，奇点(0,0)是稳定的(焦点、结点或退化结点)，而当 $u>0$ 时，奇点(0,0)是不稳定的(焦点、结点或退化结点)。

② 作函数 $V=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，那么有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=y^2(u-y^2)$$

因此,当 $u<0$ 和 $y\neq0$ 时,必有 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t<0$。由此可知当 $t\to+\infty$ 时所有的轨道都趋于原点。

③ 当 $u>0$ 时,用 Lienard 作图法容易证明该系统存在一个稳定的极限环。

综上所述,该系统在 $u=0$ 处发生了闭轨分叉。

例 6.9 考虑著名的 Van der Pol 方程

$$\ddot{x}+u(x^2-1)\dot{x}+x=0 \qquad x\in\mathbf{R},u\in\mathbf{R}$$

它等价于平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y-u\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right)\\ \dot{y}=-x\end{cases}$$

该平面系统只有唯一奇点(0,0)。容易证明当 $u<0$ 时,该奇点是稳定的焦点;当 $u=0$ 时,该奇点是中心;而当 $u>0$ 时,该奇点是不稳定的焦点,并且用 Lienard 方法容易证明该系统存在一个稳定的极限环。因此该系统在 $u=0$ 处发生了闭轨分叉。

3. 同宿分叉与异宿分叉

所谓同宿分叉或异宿分叉是指当分叉参数变化到某一值时,系统出现了同宿轨或异宿轨、或原有的同宿轨或异宿轨消失了。同宿分叉或异宿分叉是通向混沌的一条途径。同宿轨或异宿圈的破裂可导致混沌。同宿分叉或异宿分叉的例子很多,下面举出这方面的一个例子。

例 6.10 考虑 Duffing 振子

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=x-x^3-\delta y\end{cases}$$

不论 δ 为何值,系统总有三个奇点(0,0)、(1,0)及(-1,0)。当 $\delta\neq0$ 时,总有

$$\frac{\partial}{\partial x}(y)+\frac{\partial}{\partial y}(x-x^3-\delta y)=-\delta\neq0$$

因此当 $\delta\neq0$ 时,系统没有闭轨及同宿轨。另一方面,由例 5.1 可知,当 $\delta=0$ 时,系统有两条同宿轨和无穷多条闭轨;由例 5.10 可知,当 $0<\delta<2\sqrt{2}$ 时,系统有两条异宿轨。因此,这个系统在 $\delta=0$ 处发生了多种分叉:奇点分叉、闭轨分叉、同宿分叉和异宿分叉。

常微分方程组(或向量场)的分叉也可以分为两大类:静态分叉和动态分叉。

静态分叉是指奇点的数目和奇点的稳定性发生变化的分叉,如例 6.1、例 6.2 和例 6.3。而动态分叉是指静态分叉以外的分叉,如 Hopf 分叉、闭轨分叉及同宿轨和异宿轨分叉。

事实上,静态分叉和动态分叉可以在同一系统中同时发生。前面给出的许

多例子都表明了这一点。

6.2　余维1分叉

考虑单参数系统

$$\dot{x}=f(x,u)\qquad x\in\mathbf{R}^n,u\in\mathbf{R}\tag{6.2}$$

设 x_0 是方程(6.2)的一个奇点,那么 $f(x_0,u)=0$,并由此可解出 $x_0=x_0(u)$。由此可知,在奇点 x_0 的导算子的特征值与参数 u 有关。下面我们假定在奇点 x_0 的导算子,即

$$D_xf(x_0,u)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0,u) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0,u)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0,u) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0,u)\end{pmatrix}$$

只有一个实部为零的特征值,而其余的 $n-1$ 个特征值的实部都不为零。由中心流形定理,该系统的中心流形是一维的,并且在奇点 x_0 附近的几何结构除在中心流形部分外,其他部分的几何结构都已十分清楚。因此,下面只须考虑一维系统

$$\dot{x}=f(x,u)\qquad x\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\tag{6.3}$$

假设 $f(x_0,u)=0$,并由此解出了 $x_0=x_0(u)$,即对于参数 u,$x_0=x_0(u)$ 是方程(6.3)的奇点。奇点 $x_0=x_0(u)$ 的导算子为 $D_xf(x_0,u)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,u)\right)$,因而其特征值为 $\lambda=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,u)$。这样由上一节的知识可知,方程(6.3)要在 x_0 点发生分叉的参数值必须是满足代数方程 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0(u),u)=0$ 的参数值。不失一般性,假设方程(6.3)在 $(x_0,u_0)=(0,0)$ 处发生了分叉,那么此时在(0,0)点对 $f(x,u)$ 进行泰勒展开得(因为 $f(0,0)=0$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$)

$$f(x,u)=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)u+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{x^2}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial x}(0,0)ux+$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\frac{u^2}{2}+\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

于是在(0,0)处附近,方程(6.3)可写为

$$\dot{x}=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)u+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{x^2}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial x}(0,0)ux+$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\frac{u^2}{2}+\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)\frac{x^3}{3!}+\cdots \tag{6.4}$$

下面分几种情况来考虑方程(6.4)。

(1) 当$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)\neq 0$时,用中心流形理论来简化方程(6.4)。方程(6.4)的扩展形式可写为

$$\begin{cases}\dot{x}=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)u+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{x^2}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}(0,0)ux+\\ \quad\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\frac{u^2}{2}+O[(x^2+u^2)^{\frac{3}{2}}]\\ \dot{u}=0\end{cases} \tag{6.5}$$

根据 PB 规范型理论,作近似于恒等变换的变换

$$x=y+ay^2+byu+cu^2$$

代入上式到方程组(6.5)中的第一方程并利用 $\dot{u}=0$ 得

$$(1+2ay+bu)\dot{y}=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)u+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{y^2}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}(0,0)uy+$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)u^2+O[(y^2+u^2)^{\frac{3}{2}}]$$

注意到在$(y,u)=(0,0)$附近有

$$\frac{1}{1+2ay+bu}=1-2ay-bu+O(y^2+u^2)$$

因此由上面的式子有

$$\dot{y}=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)u-\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)u(2ay+bu)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{y^2}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}(0,0)uy+$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\frac{u^2}{2}+O[(y^2+u^2)^{\frac{3}{2}}]$$

因此只要取$a=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}(0,0)\Big/\left(2\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)\right)$和$b=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\Big/2\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$,那么有

$$\dot{y}=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)u+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{y^2}{2}+O[(y^2+u^2)^{\frac{3}{2}}]$$

由此可知,只要$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\neq 0$,经过适当的坐标变换后方程(6.5)的二阶 PB 规范型为

$$\dot{x}=u+x^2 \tag{6.6}$$

显然,当 $u>0$ 时,方程(6.6)不存在奇点,而当 $u<0$ 时,方程(6.6)有一个不稳定奇点 $x=\sqrt{-u}$和一个稳定奇点$x=-\sqrt{-u}$。方程(6.6)的分叉图如图6.14

所示。

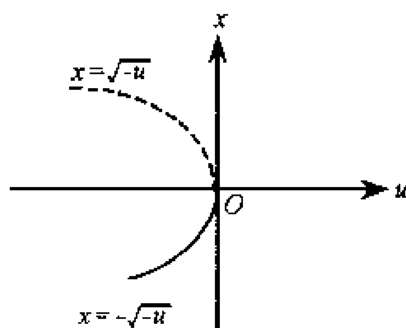


图 6.14　鞍结分叉

然而，当$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0$时，系统只有在 $u=0$ 时有唯一的奇点 $x_0=0$。

(2) 若$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=0$，而$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\neq 0$时，方程(6.4)可写为

$$\dot{x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{x^2}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial x}(0,0)ux+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\frac{u^2}{2}+\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)\frac{x^3}{3!}+\cdots \tag{6.7}$$

由中心流形理论，方程(6.7)的扩展形式的二阶 PB 规范型为

$$\dot{x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{x^2}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial x}(0,0)ux+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\frac{u^2}{2} \tag{6.8}$$

记

$$\Delta=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial x}(0,0)\right]^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)$$

① 显然，若 $\Delta<0$ 时，只有当 $u=0$ 时，方程(6.8)才有唯一的奇点 $x_0=0$，并且当$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)<0$时，奇点 $x_0=0$ 是稳定的，而当$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)>0$时，奇点 $x_0=0$ 是不稳定的。

② 当 $\Delta>0$ 时，方程(6.8)可化为

$$\dot{x}=u\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial x}(0,0)-\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right)x+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)-\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right)\frac{u}{2}\right]+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{(x+\lambda u)^2}{2} \tag{6.9}$$

现在取 λ 是下面的二次方程的解

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)-\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2\lambda\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial x}(0,0)-\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right)$$

或

$$\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)-2\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial x}(0,0)+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)=0$$

那么方程(6.9)可写为

$$\dot{x}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial x}(0,0)-\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right)u(x+\lambda u)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{(x+\lambda u)^2}{2}$$

由此不难证明经过适当的坐标变换后，方程(6.8)可化为

$$\dot{x}=ux+x^2$$

上面方程的分叉图如图6.15所示。

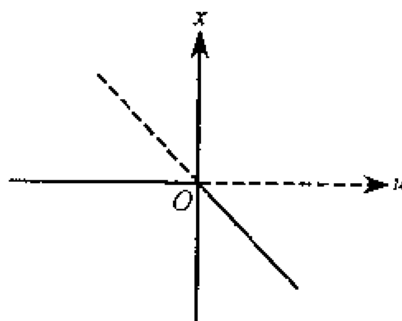


图6.15 移临界分叉

(3) 若$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=0$、$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0$、$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial x}(0,0)\neq 0$和$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\neq 0$时，类似地经过适当的坐标变换后，方程(6.8)可写为

$$\dot{x}=ux+x^2$$

(4) 若$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=0$、$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0$、$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)=0$和$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial x}(0,0)\neq 0$时，通过计算方程(6.4)的三阶PB规范型得

$$\dot{x}=ux+x^3$$

这个方程的分叉图如图6.16所示。

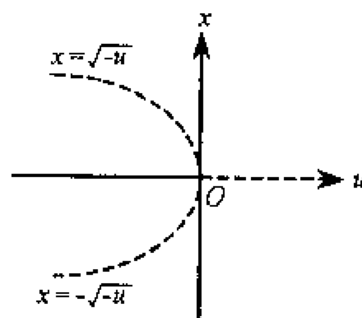


图6.16 叉型分叉

6.3 Hopf 分叉

我们仍考虑单参数系统(6.2)，且假设对于一切 $u\in\mathbf{R}$，有 $f(x_0,u)=0$。进一步假设当 $u=u_0$ 时，奇点 x_0 的导算子 $D_xf(x_0,u_0)$ 有一对共轭纯虚特征值，而其余的 $n-2$ 个特征值都有非零实部。因此，当 $u=u_0$ 时，x_0 是一个非双曲奇点，它是结构不稳定的。同前面的做法一样，奇点 x_0 的附近的几何结构可以限制到系统(6.2)在该奇点的二维中心流形上去考虑。因此，不失一般性，只需考虑这样的二维系统。

下面我们研究单参数二维系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y,u)\\ \dot{y}=g(x,y,u)\end{cases}\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2,u\in\mathbf{R}\tag{6.10}$$

并且设 $f(0,0,u)=g(0,0,u)=0$，设系统(6.10)在(0,0)的导算子的特征值为 $\alpha(u)\pm \mathrm{i}\omega(u)$，并且设 $\alpha(0)=0,\omega(0)=\omega_0$。于是在奇点附近作泰勒展开并经过适当的坐标变换后，可把系统(6.10)化为如下形式

$$\begin{cases}\dot{x}=\alpha(u)x-\omega(u)y+\bar{f}(x,y,u)\\ \dot{y}=\omega(u)x+\alpha(u)y+\bar{g}(x,y,u)\end{cases}\tag{6.11}$$

其中 $\bar{f}(x,y,u)$ 和 $\bar{g}(x,y,u)$ 是二阶无穷小的。下面来分析系统(6.11)的分叉行为。我们先从两个例子开始。

例 6.11　考虑如下线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}=ux-\omega y\\ \dot{y}=\omega x+uy\end{cases}$$

该系统的解为

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{ut}\begin{pmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

从上式可以看出，当 $u<0$ 时，解螺旋式地趋于原点，因而此时原点是稳定的焦点；当 $u=0$ 时，该系统的所有解都是周期解；而当 $u>0$ 时，所有的解都螺旋式地远离原点，因而此时原点是不稳定的焦点。因而该系统在 $u=0$ 时发生了分叉。

例 6.12　考虑平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=[du+a(x^2+y^2)]x-[\omega+cu+b(x^2+y^2)]y\\ \dot{y}=[\omega+cu+b(x^2+y^2)]x+[du+a(x^2+y^2)]y\end{cases}$$

在极坐标下，上面的方程组可化为

$$\begin{cases}\dot{r}=(du+ar^2)r\\ \dot{\theta}=(\omega+cu+br^2)\end{cases}$$

由此可以看出该系统的闭轨由 $du+ar^2=0$ 决定。因而当 $u=0$ 时，系统发生了闭轨分叉。

通过上面两个例子，我们要问，怎样研究一般情况下系统(6.11)的分叉。下面来计算系统(6.11)的四阶 PB 规范型。

记 $z=x+\mathrm{i}y, \lambda(u)=\alpha(u)+\mathrm{i}\omega(u)$，一个直接计算容易把系统(6.11)化为

$$\dot{z}=\lambda(u)z+h(z,\bar{z},u) \quad z\in\mathbf{C}, u\in\mathbf{R} \tag{6.12}$$

这里

$$h(z,\bar{z},u)=\bar{f}\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}},u\right)+\mathrm{i}\bar{g}\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}},u\right)$$

下面先求系统(6.12)的二阶 PB 规范型。将系统(6.12)的右边作二阶泰勒展开有

$$\dot{z}=\lambda(u)z+h_2(z,\bar{z},u)+O(|z|^3) \tag{6.13}$$

这里 $h_2(z,\bar{z},u)$是关于 z 和 $\bar{z}$ 的二次多项式。对方程(6.13)作近似于恒等变换的变换

$$z=w+p_2(w,\bar{w}) \qquad w\in\mathbf{C} \tag{6.14}$$

这里 $p_2(w,\bar{w})$是关于 w 和 $\bar{w}$ 的二次多项式。以式(6.14)代入方程(6.13)得

$$\left(1+\frac{\partial p_2}{\partial w}\right)\dot{w}+\frac{\partial p_2}{\partial\bar{w}}\dot{\bar{w}}=\lambda w+\lambda p_2(w,\bar{w})+h_2(w,\bar{w},u)+O(|w|^3) \tag{6.15}$$

对式(6.15)两边取共轭得

$$\frac{\partial\bar{p}_2}{\partial w}\dot{w}+\left(1+\frac{\partial\bar{p}_2}{\partial\bar{w}}\right)\dot{\bar{w}}=\bar{\lambda}\bar{w}+\bar{\lambda}p_2(\bar{w},w)+h_2(\bar{w},w,u)+O(|w^3|) \tag{6.16}$$

由式(6.15)和式(6.16)有

$$\begin{aligned}&\left[\left(1+\frac{\partial p_2}{\partial w}\right)\left(1+\frac{\partial\bar{p}_2}{\partial\bar{w}}\right)-\frac{\partial p_2}{\partial\bar{w}}\frac{\partial\bar{p}_2}{\partial w}\right]\dot{w}\\ &=\left(1+\frac{\partial\bar{p}_2}{\partial\bar{w}}\right)\left[\lambda w+\lambda p_2(w,\bar{w})+h_2(w,\bar{w},u)+O(|w|^3)\right]-\\ &\quad\frac{\partial p_2}{\partial\bar{w}}\left[\bar{\lambda}\bar{w}+\bar{\lambda}p_2(\bar{w},w)+h_2(\bar{w},w,u)+O(|w|)^3\right]\end{aligned} \tag{6.17}$$

注意到

$$\left[\left(1+\frac{\partial p_2}{\partial w}\right)\left(1+\frac{\partial\bar{p}_2}{\partial\bar{w}}\right)-\frac{\partial p_2}{\partial\bar{w}}\frac{\partial\bar{p}_2}{\partial w}\right]^{-1}=1-\frac{\partial p_2}{\partial w}-\frac{\partial\bar{p}_2}{\partial\bar{w}}+O(|w|^2) \tag{6.18}$$

以式(6.18)代入式(6.17)，得

$$\dot{w}=\lambda w-\Omega_2p_2+h_2+O(|w|^3) \tag{6.19}$$

这里

$$\Omega_2 p_2(w,\bar{w}) = \lambda \frac{\partial p_2}{\partial w} w + \bar{\lambda} \frac{\partial p_2}{\partial \bar{w}} \bar{w} - \lambda p_2$$

设 $p_2(w,\bar{w}) = aw^2 + bw\bar{w} + c\bar{w}^2$，那么

$$\Omega_2 p_2(w,\bar{w}) = a\lambda w^2 + b\bar{\lambda} w\bar{w} + c(2\bar{\lambda} - \lambda)\bar{w}^2$$

因此，如果假设 $h_2(w,\bar{w}) = a_0 w^2 + b_0 w\bar{w} + c_0 \bar{w}^2$，那么只要取

$$p_2^0(w,\bar{w}) = \frac{a_0}{\lambda} w^2 + \frac{b_0}{\bar{\lambda}} w\bar{w} + \frac{c_0}{2\bar{\lambda} - \lambda} \bar{w}^2$$

就有

$$\Omega_2 p_2^0 = h_2$$

因而在变换 $z = w + p_2^0(w,\bar{w})$ 下，式(6.19)可写为

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3) \tag{6.20}$$

由此可以看出，我们必须计算更高阶的 PB 规范型才能确定奇点的性质。

下面来计算式(6.13)的三阶 PB 规范型。我们将式(6.13)作三阶泰勒展开并利用上面做法消去二阶项，那么有

$$\dot{z} = \lambda z + h_3(z,\bar{z},u) + O(|z|^4) \tag{6.21}$$

事实上，可以利用上面相同作法把式(6.21)化为

$$\dot{w} = \lambda(u) w + c(u) w^2 \bar{w} + O(|w|^4) \tag{6.22}$$

这里 $c(u)$ 可按下面的公式计算：如果将式(6.12)式中的非线项 $h(z,\bar{z},u)$ 作三阶泰勒展开

$$h(z,\bar{z},u) = \sum_{2 \leq i+j \leq 3} h_{ij}(u) \frac{z^i \bar{z}^j}{i!j!} + O(|z|^4)$$

那么

$$c(u) = \frac{1}{2|\lambda|^2} h_{20} h_{11} (2\lambda + \bar{\lambda}) + \frac{1}{\lambda}|h_{11}|^2 + \frac{1}{2(2\lambda - \bar{\lambda})}|h_{02}|^2 + \frac{1}{2} h_{21} \tag{6.23}$$

如果继续上面的过程，我们可以消去四次项，通过类似的计算，式(6.12)的四阶 PB 规范型可写为

$$\dot{w} = \lambda(u) w + c(u) w^2 \bar{w} + O(|w|^5) \tag{6.24}$$

式(6.24)是复数方程，为了将其化为实方程，令

$$c(u) = a(u) + \mathrm{i}b(u) \qquad w = x + \mathrm{i}y$$

那么将上面两式代入式(6.24)，有

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(u)x - \omega(u)y + [a(u)x - b(u)y](x^2 + y^2) + O(r^5) \\ \dot{y} = \omega(u)x + \alpha(u)y + [b(u)x + a(u)y](x^2 + y^2) + O(r^5) \end{cases} \tag{6.25}$$

这里 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$。如果用极坐标表示方程组(6.25)，有

$$\begin{cases}\dot{r}=\alpha(u)r+a(u)r^3+O(r^5)\\ \dot{\theta}=\omega(u)+b(u)r^2+O(r^4)\end{cases} \tag{6.26}$$

方程组(6.26)中的四阶截断形式为

$$\begin{cases}\dot{r}=r[\alpha(u)+a(u)r^2]\\ \dot{\theta}=\omega(u)+b(u)r^2\end{cases}$$

其形式与例 6.12 中的极坐标方程形式完全相同,只是这里的所有系数都与参数 u 有关。由此,我们自然会问,系统(6.10)是否也有其四阶 PB 规范型的分叉行为呢？下面的 Hopf 定理在一定条件下肯定地回答了这个问题。

定理 1(Hopf) 设原点(0,0)是二维系统(6.10)的奇点,并设在原点处的导算子在 $u=0$ 附近有特征值 $\alpha(u)\pm i\omega(u)$,使得 $\alpha(0)=0,\omega(0)=\omega_0>0,\alpha'(0)\neq 0$,则存在 $\epsilon_0>0$ 和一个解析函数

$$u(\epsilon)=\sum_{k=2}^{+\infty}u_k\epsilon^k \qquad \epsilon\in(0,\epsilon_0) \tag{6.27}$$

使得 $u=u(\epsilon)\neq 0$(其中 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$)时,系统(6.10)在原点的充分小邻域内有唯一的闭轨 Γ_ϵ,其周期为

$$T(\epsilon)=\frac{2\pi}{\omega_0}\Big(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\tau_k\epsilon^k\Big) \tag{6.28}$$

当 $\epsilon\to 0$ 时,$u(\epsilon)\to 0$,Γ_ϵ 趋于原点。设 u_{k_1} 是展开式(6.27)中的第一个不为零的系数,则当 $du_{k_1}>0$,Γ_ϵ 是稳定极限环,而当 $du_{k_1}<0$ 时,Γ_ϵ 是不稳定极限环。

由该定理可以看出,系统(6.10)在 $u=0$ 处发生了动态分叉。

该定理的证明不在本书中给出,读者可以在相关书中找到。但为了方便起见,我们特地给出了 $k=2$ 时的系数公式:

$$u_2=-a/d \qquad \tau_2=-(b+u_2e)/\omega_0 \tag{6.29}$$

这里 $a=\mathrm{Re}c(0)$。a 也可以直接用下列公式给出

$$a=\frac{1}{16}(\bar{f}_{xxx}+\bar{f}_{xyy}+\bar{g}_{xxy}+\bar{g}_{yyy})+\frac{1}{16\omega_0}[\bar{f}_{xy}(\bar{f}_{xx}+\bar{f}_{yy})-\bar{g}_{xy}(\bar{g}_{xx}+\bar{g}_{yy})-\bar{f}_{xx}\bar{g}_{xx}+\bar{f}_{yy}\bar{g}_{yy}] \tag{6.30}$$

在上式中 $x=y=u=0$。

显然,如果 $a\neq 0$,那么从式(6.30)可知,$du_2=-a$。由此可知 Γ_ϵ 的稳定性由 a 的符号决定。

Hopf 分叉是当参数变化时从奇点产生极限环的分叉。而当 $ad\neq 0$ 时 Hopf 分叉称为是通有的,否则就称为是退化的。对于通有 Hopf 分叉有 $u_2\neq 0$,其分叉

行为由四阶 PB 规范形给出。

在通有分叉中其极限环是唯一的，但在退化 Hopf 分叉中并不一定具有这一性质。

例 6.13 考虑平面系统

$$\begin{cases}\dot{x} = -y + x(u - r^2)(u - 2r^2)\\ \dot{y} = x + y(u - r^2)(u - 2r^2)\end{cases}$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2, u \in \mathbf{R}$。在极坐标系中，上面的方程组可写成

$$\begin{cases}\dot{r} = r(u - r^2)(u - 2r^2)\\ \dot{\theta} = 1\end{cases}$$

容易验证，对于任何 u 原点都是不稳定焦点，从极坐标方程中容易看出，当 $u > 0$ 时，系统有两个极限环：$2r^2 = u$ 是稳定的极限环，$r^2 = u$ 是不稳定的极限环。因此在 $u = 0$ 处出现了退化 Hopf 分叉。

Hopf 分叉中的极限环可以近似地计算出来。可以用多种方法来近似计算这种闭轨，如我们已讲过的 PB 规范型方法。

下面举例说明 Hopf 分叉的应用。

例 6.14 考虑布鲁塞尔振子系统的 Hopf 分叉。在空间均匀情形下，布鲁塞尔振子系统可用下列二维系统描述

$$\begin{cases}\dot{X} = A - (B + 1)X + X^2Y\\ \dot{Y} = BX - X^2Y\end{cases} \qquad A > 0, B > 0$$

这个系统有奇点 (A, BA^{-1})。作坐标变换

$$X = x + A \qquad Y = y + BA^{-1}$$

则上面的系统可化为

$$\begin{cases}\dot{x} = (B - 1)x + A^2y + BA^{-1}x^2 + 2Axy + x^2y\\ \dot{y} = -Bx - A^2y - BA^{-1}x^2 - 2Axy - x^2y\end{cases}$$

这个系统有奇点(0,0)，在(0,0)处的导算子为

$$\begin{pmatrix} B - 1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix}$$

该矩阵有两个特征根

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[B - (1 + A^2)] \pm \mathrm{i}\sqrt{A^2 - \frac{1}{4}[B - (1 + A^2)]^2}$$

由此可知当

$$A^2 - \frac{1}{4}[B - (1 + A^2)]^2 > 0$$

即

$$(1-|A|)^2 < B < (1+|A|)^2$$

时，λ_1 与 λ_2 是一对共轭复数。特别当 $B=1+A^2$ 时，λ_1 与 λ_2 的实部为零。记

$$\lambda_{1,2} = \alpha(B) \pm \mathrm{i}\omega(B)$$

这里

$$\alpha(B) = \frac{1}{2}[B-(1+A^2)]$$

$$\omega(B) = \sqrt{A^2 - \frac{1}{4}[B-(1+A^2)]^2}$$

并且当 $B=B_0=1+A^2$ 时，$\alpha(B_0)=0, \omega(B_0)=|A|=\omega_0$。

下面来研究在 $B=B_0$ 附近布鲁塞尔振子系统的 Hopf 分叉。由线性代数知识，作坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{A^2}(1-B+\alpha(B)) & -\frac{\omega(B)}{A^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

则关于 x、y 的微分方程组变为关于 u、v 的方程组：

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha(B)u - \omega(B)v + \frac{B}{A}u^2 + u(2A+u)\varphi(u,v) \\ \dot{v} = \omega(B)u + \alpha(B)v + \frac{B\delta}{A}u^2 + \delta u(2A+u)\varphi(u,v) \end{cases}$$

这里

$$\delta = \frac{1+A^2-B^2+\alpha(B)}{\omega(B)}$$

$$\varphi(u,v) = \frac{(1-B+\alpha(B))u - \omega(B)v}{A^2}$$

显然

$$d = \left.\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}B}\right|_{B=B_0} = \frac{1}{2}$$

由式(6.30)有

$$a = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$u_2 = -\frac{a}{d} = \frac{1}{2A^2} + \frac{1}{4}$$

于是由 Hopf 定理，当 $B>B_0$ 时，关于(u,v)的系统在原点(0,0)附近有一个不稳定的极限环，并且当 $B \to B_0$ 时，此极限环趋于原点，其周期为

$$T = \frac{2\pi}{A} + O(\epsilon^2)$$

6.4 余维 k 分叉的基本概念

考虑 n 维常微分方程

$$\dot{x}=f(x) \qquad x\in\mathbf{R}^n \tag{6.31}$$

设 $x_0=\mathbf{0}$ 是方程(6.31)的非双曲奇点,即在 $x_0=\mathbf{0}$ 处的导算子 $Df(0)$有零实部的特征值。设 $Df(\mathbf{0})$有 h 个实部为零的特征值,不失一般性,可以假设

$$Df(\mathbf{0})=\begin{pmatrix} J_h & 0 \\ 0 & A_{n-h} \end{pmatrix}$$

其中 J_h 是 h 阶实约当标准型矩阵,其所有特征值的实部都为零;而 A_{n-h}是 $n-h$ 阶矩阵,其所有特征值的实部不为零。记

$$M=\{A\mid A \text{ 是 } h \text{ 阶实矩阵}\}$$

$$N=\{B\mid B \text{ 与 } J_h \text{ 相似}\}$$

那么 N 是 M 的子流形,若 N 在 M 中的余维数为 k 的话,那么称方程(6.31)在奇点 $x_0=\mathbf{0}$ 是余维 k 的。

有了余维 k 的定义之后,可以对微分方程(6.31)在奇点 $x_0=\mathbf{0}$ 附近作一个适当的分类。

(1) 余维为 1 的情形

① 如果 $Df(\mathbf{0})$有单重零特征根,那么

$$J=(0)$$

② 如果 $Df(\mathbf{0})$有一对纯虚根 $\pm i\omega(\omega>0)$,那么

$$J=\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 余维为 2 的情形

① 如果 $Df(\mathbf{0})$有二重零特征根,且 J 不可对角化,那么

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

② 如果 $Df(\mathbf{0})$有单重零特征根和一对纯虚特征根 $\pm i\omega(\omega>0)$,那么

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}$$

③ 如果 $Df(\mathbf{0})$有两对纯虚特征根 $\pm i\omega_1$ 和 $\pm i\omega_2(\omega_1,\omega_2>0)$,那么

$$J=\begin{pmatrix}0 & -\omega_1 & 0 & 0\\ \omega_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2\\ 0 & 0 & \omega_2 & 0\end{pmatrix}$$

由上面可以看出，余维数越高，情况越复杂。

考虑含参数系统(6.1)。设当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 时，系统(6.1)有奇点 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$。如果系统(6.1)在奇点 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$ 处是余维 k 的并且发生了分叉，那么就称系统(6.1)在 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$ 处发生了余维 k 分叉。

考虑单参数系统(6.2)，并且设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0},0)=\boldsymbol{0}$。当考虑系统(6.2)的分叉时，必须考虑系统(6.2)的扩展系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\lambda) \quad \boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\lambda\in\mathbf{R}\\ \dot{\lambda}=0\end{cases} \tag{6.32}$$

在$(\boldsymbol{0},0)$处展开 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\lambda)$ 至二阶无穷小得

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x},\lambda)+O((|\boldsymbol{x}|^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}})\\ \dot{\lambda}=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{6.33}$$

这里 $A=Df_x(\boldsymbol{0},0)$，$\boldsymbol{\gamma}_0=\left(\frac{\partial f_1}{\partial\lambda}\boldsymbol{0},0),\frac{\partial f_2}{\partial\lambda}(\boldsymbol{0},0),\cdots,\frac{\partial f_n}{\partial\lambda}(\boldsymbol{0},0)\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x},\lambda)$是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 λ 的二次齐次多项式。

下面来计算方程组(6.32)的二阶 PB 规范型。作变换

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{y},\lambda)\\ \lambda=\lambda\end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{y},\lambda)$是关于 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 和 λ 的二次齐次多项式，由此方程组(6.33)可化为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{y}}=A\boldsymbol{y}+\lambda\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{y},\lambda)+A\boldsymbol{p}_2-D\boldsymbol{p}_2\cdot(A\boldsymbol{y}+\lambda\boldsymbol{\gamma}_0)+O((|\boldsymbol{y}|^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}})\\ \dot{\lambda}=0\end{cases}$$

选取适当的二次齐次多项式 $\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x},\lambda)$使上式化为简单形式，就可以得到方程组(6.32)的二阶 PB 规范型。下面以一个例子说明这一点。

例 6.15 考虑二维单参数系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y,\lambda)\\ \dot{y}=g(x,y,\lambda)\end{cases} \tag{6.34}$$

这里 $f(0,0,0)=g(0,0,0)=0$，并且假设在奇点$(0,0)$($u=0$)处的导算子

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)\\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0,0) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0,0)\end{pmatrix}$$

有二重零特征值,而且不可对角化。不失一般性,我们假设

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

否则可以经过适当的坐标变换把上面的导算子化为这个形式。那么,我们在(0,0,0)处对 $f(x,y,\lambda)$ 和 $g(x,y,\lambda)$ 作二阶泰勒展开后,可把系统(6.34)化为

$$\begin{cases}\dot{x}=y+\alpha_0\lambda+h_2^1(x,y,\lambda)+O((x^2+y^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}})\\ \dot{y}=\beta_0\lambda+h_2^2(x,y,\lambda)+O((x^2+y^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}})\end{cases}\tag{6.35}$$

这里 $\alpha_0=\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}(0,0,0)$, $\beta_0=\dfrac{\partial g}{\partial\lambda}(0,0,0)$, h_2^1 和 h_2^2 是关于 x、y 和 λ 的二次齐次多项式。

显然系统(6.35)在经过适当的坐标变换后可以写为下列形式

$$\begin{cases}\dot{x}=y+h_2^1(x,y,\lambda)+O((x^2+y^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}})\\ \dot{y}=\beta_0\lambda+h_2^2(x,y,\lambda)+O((x^2+y^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}})\end{cases}\tag{6.36}$$

对系统(6.36)的扩展形式作坐标变换

$$\begin{cases}x=y_1+p_1(y_1,y_2,\lambda)\\ y=y_2+p_2(y_1,y_2,\lambda)\\ \lambda=\lambda\end{cases}$$

这里 p_1 和 p_2 都是关于 y_1、y_2 和 λ 的二次齐次多项式,那么系统(6.36)的扩展形式可化为

$$\begin{cases}\dot{y}_1=y_2+h_2^1(y_1,y_2,\lambda)+p_2-y_2\dfrac{\partial p_1}{\partial y_1}-\beta_0\lambda\dfrac{\partial p_1}{\partial y_2}+O((x^2+y^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}})\\ \dot{y}_2=\beta_0\lambda+h_2^2(y_1,y_2,\lambda)-y_2\dfrac{\partial p_2}{\partial y_1}-\beta_0\lambda\dfrac{\partial p_2}{\partial y_2}+O((x^2+y^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}})\\ \dot{\lambda}=0\end{cases}$$

设

$$\begin{cases}h_2^1(y_1,y_2,\lambda)=\alpha_{11}^0y_1^2+\alpha_{22}^0y_2^2+\alpha_{33}^0\lambda^2+\alpha_{12}^0y_1y_2+\alpha_{13}^0y_1\lambda+\alpha_{23}^0y_2\lambda\\ h_2^2(y_1,y_2,\lambda)=\beta_{11}^0y_1^2+\beta_{22}^0y_2^2+\beta_{33}^0\lambda^2+\beta_{12}^0y_1y_2+\beta_{13}^0y_1\lambda+\beta_{23}^0y_2\lambda\\ p_1(y_1,y_2,\lambda)=a_{11}y_1^2+a_{22}y_2^2+a_{33}\lambda^2+a_{12}y_1y_2+a_{13}y_1\lambda+a_{23}y_2\lambda\\ p_2(y_1,y_2,\lambda)=b_{11}y_1^2+b_{22}y_2^2+b_{33}\lambda^2+b_{12}y_1y_2+b_{13}y_1\lambda+b_{23}y_2\lambda\end{cases}$$

直接计算有

$$
\begin{aligned}
& h_2^1 + p_2 - y_2 \frac{\partial p_1}{\partial y_1} - \beta_0 \lambda \frac{\partial p_1}{\partial y_2} \\
&= (b_{11} + \alpha_{11}^0) y_1^2 + (b_{22} - a_{12} + \alpha_{22}^0) y_2^2 + (b_{33} - \beta_0 a_{23} + \alpha_{33}^0) \lambda^2 + \\
&\quad (b_{12} - 2a_{11} + \alpha_{12}^0) y_1 y_2 + (b_{13} - \beta_0 a_{12} + \alpha_{13}^0) y_1 \lambda + \\
&\quad (b_{23} - a_{13} - 2\beta_0 a_{22} + \alpha_{23}^0) y_2 \lambda
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
& h_2^2 - y_2 \frac{\partial p_2}{\partial y_1} - \beta_0 \lambda \frac{\partial p_2}{\partial y_2} \\
&= \beta_{11}^0 y_1^2 + (\beta_{22}^0 - b_{12}) y_2^2 + (\beta_{33}^0 - \beta_0 b_{23}) \lambda^2 + (\beta_{12}^0 - 2b_{11}) y_1 y_2 + \\
&\quad (\beta_{13}^0 - \beta_0 b_{12}) y_1 \lambda + (\beta_{23}^0 - b_{13} - 2\beta_0 b_{22}) y_2 \lambda
\end{aligned}
$$

若 $\beta_0 \neq 0$,在上面两式中令

$$
\begin{cases}
b_{11} + \alpha_{11}^0 = 0 & b_{22} - a_{12} + \alpha_{22}^0 = 0 \quad b_{33} - \beta_0 a_{23} + \alpha_{33}^0 = 0 \\
b_{12} - 2a_{11} + \alpha_{12}^0 = 0 & b_{13} - \beta_0 a_{12} + \alpha_{13}^0 = 0 \quad b_{23} - a_{13} - 2\beta_0 a_{22} + \alpha_{33}^0 = 0 \\
\beta_{22}^0 - b_{12} = 0 & \beta_{33}^0 - \beta_0 b_{23} = 0 \quad \beta_{13}^0 - \beta_0 b_{12} = 0 \\
\beta_{23}^0 - b_{13} - 2\beta_0 b_{22} = 0
\end{cases}
$$

则有

$$
h_2^1 + p_2 - y_2 \frac{\partial p_1}{\partial y_1} - \beta_0 \lambda \frac{\partial p_1}{\partial y_2} = 0
$$

和

$$
h_2^2 - y_2 \frac{\partial p_2}{\partial y_1} - \beta_0 \lambda \frac{\partial p_2}{\partial y_2} = \beta_{11}^0 y_1^2 + (\beta_{12}^0 + 2\alpha_{11}^0) y_1 y_2
$$

于是系统(6.34)的扩展形式的二阶 PB 规范型为

$$
\begin{cases}
\dot{y}_1 = y_2 \\
\dot{y}_2 = \beta_0 \lambda + (\beta_{12}^0 + 2\alpha_{11}^0) y_1 y_2 + \beta_{11}^0 y_1^2
\end{cases}
$$

经过适当的坐标变换后,上面的方程组可写为下面形式:

$$
\begin{cases}
\dot{y}_1 = y_2 \\
\dot{y}_2 = u + a y_1 y_2 + b y_1^2
\end{cases}
$$

同理,若 $\beta_0 = 0$,系统(6.34)的扩展形式的二阶 PB 规范型为

$$
\begin{cases}
\dot{y}_1 = y_2 \\
\dot{y}_2 = a y_1 y_2 + b y_1^2 + c\lambda^2 + d y_1 \lambda
\end{cases}
$$

对于多参数系统,其二阶泰勒展开可写为如下形式

$$\dot{x}=D_x f(\mathbf{0},\mathbf{0})x+D_u f(\mathbf{0},\mathbf{0})u+h_2(x,u)+O((|x|^2+|u|^2)^{\frac{3}{2}})$$

从理论上讲,我们可以求出上面方程组的二阶 PB 规范型以及更高阶的 PB 规范型,但随着系统维数的增大以及分叉参数的增多,计算 PB 规范型越来越困难。

6.5　突变与分叉

托姆的突变理论、普里高津的耗散结构理论以及哈肯的协同学曾经是上个世纪最活跃的三大理论。事实上,托姆的突变理论与分叉概念是密切相关的。

突变理论是研究不连续现象的,研究非连续性突然变化的现象。突变理论是用拓扑知识和稳定性理论去描述系统的临界点的状态,描述在临界点附近,外部条件微小改变引起系统突然跳跃质变的规律。

托姆的"初等突变理论"考虑的是如下含参数的梯度系统

$$\dot{x}=-\nabla_x V(x,u)\quad x\in\mathbf{R}^n,u\in\mathbf{R}^m \tag{6.37}$$

其中 x 是状态变量,u 是控制变量,V 是势函数,$\nabla_x V(x,u)$是势函数关于变量 x 的梯度,即

$$\nabla_x V(x,u)=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x,u),\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_n}(x,u)\right)^{\mathrm{T}}$$

我们知道,系统(6.37)的奇点是下面代数方程的解

$$\nabla_x(x,u)=0$$

即下列代数方程组的解

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(x,u)=0\quad\cdots\quad\frac{\partial V}{\partial x_n}(x,u)=0$$

它们表明系统(6.37)的奇点就是托姆的"突变理论"中的势函数的临界点。由此可见,突变理论与奇点分叉是相关的。

设 x_0 是系统(6.37)的奇点,则在该奇点的导算子为

$$-D^2V(x_0,u)=-\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}(x_0,u) & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_n}(x_0,u)\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_n}(x_0,u) & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}(x_0,u)\end{pmatrix}$$

它是势函数 $V(x,u)$在 x_0 的 Hesse 矩阵的反号。

势函数 $V(x,u)$在 x_0 点的 Hesse 矩阵是实对称矩阵,因而由线性代数知识可知它的所有特征值都为实数。另一方面,若在 x_0 点发生分叉,那么要求

$D^2V(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})$必须有实部为零的特征值，因而在这种情况必须要求 $D^2V(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})$有零特征值，从而必有行列式

$$\det(D^2V(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}))=0$$

进一步还有：若 Hesse 矩阵 $D^2V(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})$是正定的，那么奇点 $\boldsymbol{x}_0$ 是稳定奇点；而当 $D^2V(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})$是负定或不定时，$\boldsymbol{x}_0$ 是不稳定奇点。

从上面可以看出，初等突变理论实质上是含参数的梯度系统的分叉理论。为了更清楚地看清这种联系，我们将以几个例子说明这一点。为此，先引进两个基本概念。

① 平衡曲面 M：由系统(6.37)的所有奇点（或势函数 $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$的所有临界点）组成的集合，即

$$M=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\mid\nabla_x V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m\}$$

② 奇异点集 S：由势函数 $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$的所有退化临界点组成的集合，即

$$S=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\mid\nabla_x V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0,D^2V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m\}$$

奇异点集 S 在参数空间 $\mathbf{R}^m$ 中的投影称为分叉集，记为 B。

例 6.16(折叠突变) 取势函数为

$$V(x,u)=x^3+\mu x\quad x\in\mathbf{R},u\in\mathbf{R}$$

这个势函对应的动力系统为

$$\dot{x}=-3x^2-u$$

容易计算得

$$M=\{(x,u)\mid 3x^2+u=0\}$$
$$S=\{(x,u)\mid 3x^2+u=0,x=0\}=\{(0,0)\}$$
$$B=\{0\}$$

这个系统当 $u<0$ 时有两个奇点 $x_\pm=\pm\sqrt{-\frac{u}{3}}$。显然 x_+ 是稳定奇点，而 x_- 是不稳定奇点。奇点曲线的图像如图 6.17 所示。

例 6.17(尖点突变) 取势函数为

$$V(x,u_1,u_2)=x^4+u_1x^2+u_2x\quad x\in\mathbf{R},(u_1,u_2)\in\mathbf{R}^2$$

对应的梯度系统为

$$\dot{x}=-4x^3-2u_1x-u_2\tag{6.38}$$

于是平衡曲面为

$$M=\{(x,u_1,u_2)\mid 4x^3+2u_1x+u_2=0\}$$

奇异点集为

$$S=\{(x,u_1,u_2)\mid 4x^3+2u_1x+u_2=0,6x^2+u_1=0\}$$

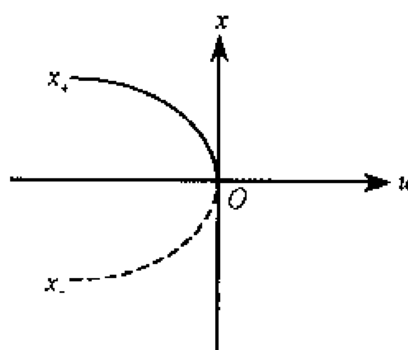


图 6.17　奇点曲线图像

分叉集为

$$B=\{(u_1,u_2)\mid\Delta=8u_1^3+27u_2^2=0\}$$

可画出平衡曲面 M 的图像和分叉集的图像如图 6.18 和图 6.19 所示。

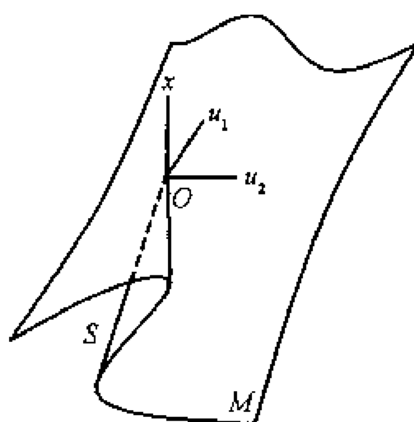


图 6.18　平衡曲面 M 的图像

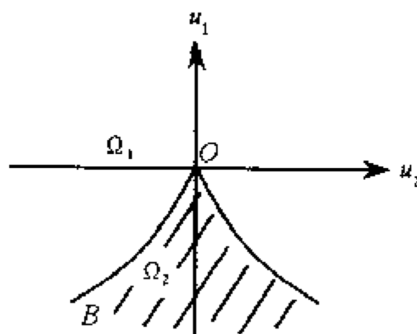


图 6.19　分叉集 B 的图像

由分叉集 B 的图像可以看出，原点 O 是分叉集的一个尖点，有时也称 B 为尖点曲线。尖点曲线将 (u_1,u_2) 空间分为三个部分：在 Ω_1 区域，由于三次代数方程 $4x^3+2u_1x+u_2=0$ 的判别式 $\Delta=8u_1^3+27u_2^2>0$，因而在此区域内，系统(6.38)只有一个奇点；当 $\Delta=0$ 时，系统(6.38)有两个奇点；而当 $\Delta<0$ 时，系统

(6.38)有三个奇点。由此可知:系统(6.38)在尖点 O 发生了余维 2 分叉,而在尖点曲线其他点上发生了余维 1 分叉。

为了更清楚地了解分叉行为,我们现在限制 u_1,u_2 中的一个参数。

(1) 当 u_1 固定时,分三种情况来考虑:

① 当 $u_1>0$ 时,我们在 u_2x 平面上画奇点曲线

$$u_2=-(4x^3+2u_1x)$$

的图像。该曲线与 x 轴只有一个交点,并且当 $x\to\infty$ 时,$u_2\to-\infty$,当 $x\to-\infty$ 时,$u_2\to+\infty$,另外当 $u_1>0$ 时,Hesse 矩阵

$$D^2V(x,u_1,u_2)=(12x^2+2u_1)$$

的特征值大于零,因而此时奇点是稳定的。奇点曲线的图像如图 6.20 所示。

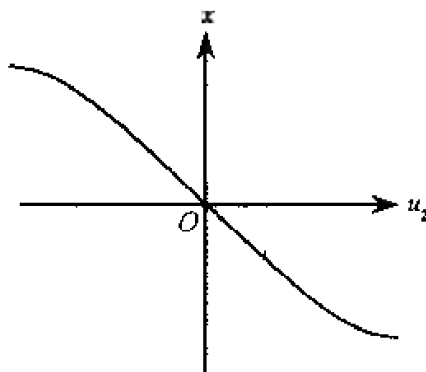


图 6.20 $u_1>0$

② 当 $u_1=0$ 时,奇点曲线为 $u_2=-4x^3$,并且只要 $x\neq0$,奇点是稳定的。奇点曲线的图像与①类似。

③ 当 $u_1<0$ 时,曲线 $u_2=-(4x^3+2u_1x)$ 与 x 轴有三个交点,且有一个极大点和一个极小点。显然当 $|x|>\sqrt{-\frac{u_1}{6}}$ 时,Hesse 矩阵是正定的,因而奇点是稳定的,而当 $|x|<\sqrt{-\frac{u}{6}}$ 时,Hesse 矩阵是负定的,因而奇点是不稳定的。奇点曲线的图像如图 6.21 所示。

(2) 当 u_2 固定时,也分三种情况来考虑:

① 当 $u_2<0$ 时,奇点曲线

$$u_1=-\frac{4x^3+u_2}{2x}$$

与 x 轴没有交点。下面来考虑奇点的稳定性。由 Hesse 矩阵的表示可知,在抛物线 $u_1=-6x^2$ 内部由于在奇点处的 Hesse 矩阵是负定的,因而位于抛物线 u_1

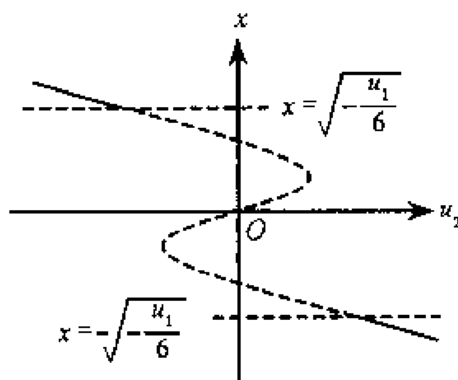


图 6.21 $u_1<0$

$=-6x^2$ 内部的奇点是不稳定的；而在抛物线 $u_1=-6x^2$ 外部由于在奇点处的 Hesse 矩阵是正定的，因而位于抛物线外部的奇点是稳定的。

另一方面，解方程组

$$\begin{cases}4x^3+2u_1x+u_2=0\\6x^2+u_1=0\end{cases}$$

可得奇点曲线与抛物线的交点是

$$x_0=\frac{u_2}{2\sqrt[3]{u_2^2}}<0 \qquad u_1^0=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{u_2^2}<0$$

u_2 固定后的奇点曲线图如图 6.22 所示。

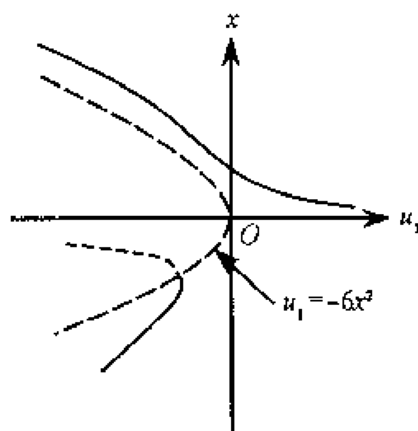


图 6.22 $u_2<0$

② 当 $u_2=0$ 时，奇点曲线为 $2x^3+u_1x=0$，即 u_1 轴和抛物线 $u_1=-2x^2$。类似于①，位于抛物线 $u_1=-6x^2$ 内部的奇点是不稳定的，而位于抛物线 $u_1=-2x^2$ 外部的奇点是稳定的。奇点曲线图如图 6.23 所示。

③ 当 $u_2>0$ 时，类似于①，奇点曲线图如图 6.24 所示。

从上面可以看出：通过固定某些参数值来画奇点曲线图，可以更好地了解系

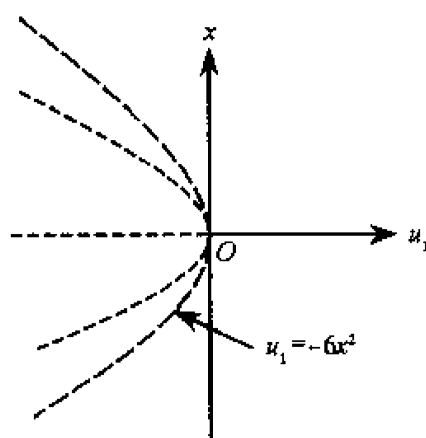


图 6.23　$u_2=0$

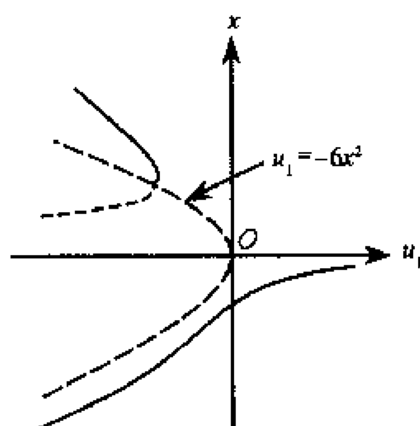


图 6.24　$u_2>0$

统的分叉行为。

思考题

1. 试研究系统

$$\begin{cases}\dot{x}=u_1x-y-u_2x(x^2+y^2)-x(x^2+y^2)^2\\ \dot{y}=x+u_1y-u_2y(x^2+y^2)-y(x^2+y^2)^2\end{cases}$$

的分叉行为，并画出(u_1,u_2)空间的分叉图。

2. 考虑 Van der Pol 方程

$$\begin{cases}\dot{x}=x-\sigma y-x(x^2+y^2)\\ \dot{y}=\sigma x+y-y(x^2+y^2)\end{cases}$$

这里 σ 是分叉参数，试找出该系统发生 Hopf 分叉的条件。

3. 证明系统

$$\ddot{x} + u\dot{x} + vx + x^2\dot{x} + x^3 = 0$$

在半直线 $B_1 = \{(u, v) \mid u = 0, v > 0\}$ 和半直线 $B_2 = \{(u, v) \mid u = v, v < 0\}$ 上经历了 Hopf 分叉。

4. 试研究 Lorenz 系统的 Hopf 分叉。

第七章 混 沌

自从 1963 年 Lorenz 在进行长期天气预报动力学模型的数值计算时发现混沌现象以来,混沌已成为自然科学和社会科学的共同研究热点。然而,至今也没有给混沌下一个各学科都统一而又可操作的定义。在哲学上,混沌是指系统的终值状态敏感地依赖于系统的初始状态,是确定性系统中的内在随机性。亦即,混沌是指在参数空间的一定范围内,确定性的非线性系统表现出长时期行为对初值的敏感依赖性,初值的微小误差被指数式放大,造成运动轨道的显著偏离,以至系统的行为与随机运动原则上无法区别。在数学上,有一个在 Smale 马蹄意义下的混沌定义,用这个定义判断扰动 Hamilton 系统产生混沌的条件是有效的,特别是二维 Hamilton 系统的扰动。虽然混沌的这个定义可以有效地操作,但它覆盖的范围太小。

众所周知,对于保守系统,不同初始条件有不同的轨道。然而,对于耗散系统,不同初始条件的轨道可趋于同一点集,这种点集我们称之为吸引子。如果这种吸引子的维数是分数的话,我们进一步称之为混沌吸引子或奇怪吸引子。

事实上,Lorenz 吸引子就是从数值计算上发现的第一个混沌吸引子。下面我们将从混沌吸引子计算来开始本章。

7.1 由数值计算发现混沌吸引子

由数值计算来发现混沌吸引子主要是视觉方面的。如果通过对过某一点的轨道的计算,随着时间的增加,我们很难预测轨道的走向,轨道上的点总是在一个有限范围内来回地跑。看起来,随着时间的增加轨道在一个有限范围内来回地折叠与拉伸,好像要填满一块区域。进一步,初始条件靠得很近的两条件轨道,随着时间的增加,这两条轨道之间的差别越来越大。如果有上面的现象出现,我们就认为该系统出现了混沌。

现在我们首先提出一个问题,怎样从数值计算上获得混沌吸引子?目前,从所有的数值计算例子来看,具有混沌吸引子的自治系统都和不稳定的奇点联系在一起,特别是和鞍点联系在一起。

如果一个系统具有混沌吸引子,那么怎样从数值计算上将其表现出来?就目前来讲还没有一个有效的方法。这里的关键问题就是选择初始条件。如果我

们能找到一个系统的一个捕捉区或一个包含捕捉区的更大的吸引域的话，并且我们知道在这个捕捉区内包含不稳定的奇点（特别是有鞍点），那么如果系统有一个包含在这个捕捉区内的混沌吸引子的话，除某一例外方向外（主要是由差分格式引起的），我们不论从捕捉区上或吸引域上的那一点出发都能从数值上或从视觉方面获得这个混沌吸引子。下面就以著名的 Lorenz 系统来说明这个问题。

例 7.1　考虑著名的 Lorenz 系统

$$\begin{cases}\dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \qquad \sigma > 0, b > 0 \\ \dot{z} = -bz + xy\end{cases}$$

显然，当 $1 + \sigma + b > 0$ 时，有

$$\frac{\partial}{\partial x}[\sigma(y - x)] + \frac{\partial}{\partial y}(rx - y - xz) + \frac{\partial}{\partial z}(-bz + xy) = -(1 + \sigma + b) < 0$$

这说明该系统的散度（即体积收缩率）为负，因而它是耗散的。散度为负常数，这说明相空间内的收缩与位置无关，是均匀收缩。

另一方面，一个直接的计算得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2] = -\sigma x^2 - y^2 - b\left[z - \frac{1}{2}(\sigma + r)\right]^2 + \frac{1}{4}b(\sigma + r)^2$$

上式的右边在椭球 $S: \sigma x^2 + y^2 + b\left[z - \frac{1}{2}(\sigma + r)\right]^2 \leqslant \frac{1}{4}b(\sigma + r)^2$ 的外部小于零。于是我们只要取 R 足够大，使得椭球 S 包含在椭球 $x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2 \leqslant 2R^2$ 的内部，那么区域

$$M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2 \leqslant 2R^2\}$$

就是一个捕捉区。设 ϕ_t 是 Lorenz 系统的流，那么由捕捉区 M 生成的吸引子为

$$\Lambda = \bigcap_{t > 0}\phi_t(M)$$

由上面的推导过程可知，Λ 的吸引域为整个三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$。这就说明，如果 Lorenz 方程在 $\sigma > 0, r > 0$ 时有吸引子的话，我们可以从捕捉区 M 外（离原点较远的地方）任一点出发，都可以在数值上从视觉方面获得该吸引子。

为了获得混沌吸引子，我们要求当 $\sigma > 0, r > 0$ 时，Lorenz 系统存在不稳定奇点。例如，在 Lorenz 方程中取 $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$ 时，那么有

$$\begin{cases}\dot{x} = 10(y - x) \\ \dot{y} = 28x - y - xz \\ \dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy\end{cases}$$

由例 5.8 可知，此时该系统有 3 个不稳定奇点。图 7.1 ~ 图 7.4 就是我们通过数

值计算用计算机画出的 Lorenz 混沌吸引子三维图形和 Lorenz 混沌吸引子在坐标平面上的投影图。

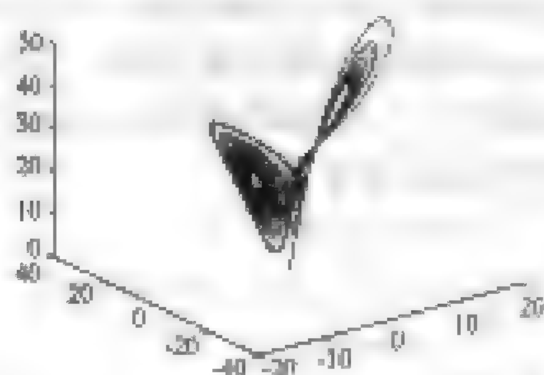


图 7.1 按 x、y、z 顺序画出的 Lorenz 吸引子

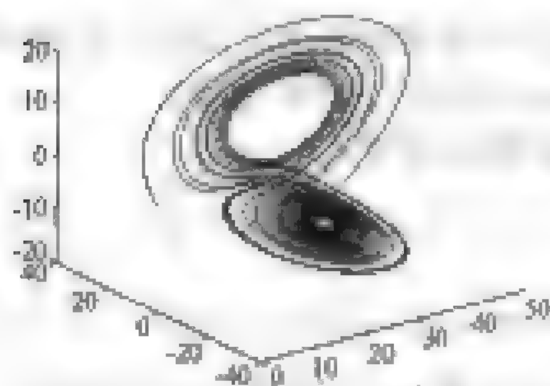


图 7.2 按 z、y、x 顺序画出的 Lorenz 吸引子

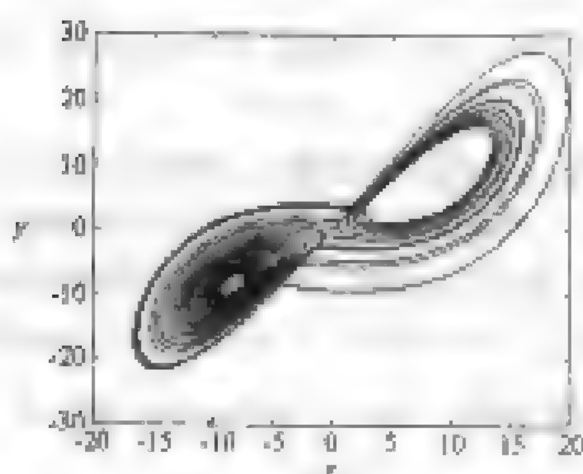


图 7.3 Lorenz 吸引子在 xy 平面上的投影

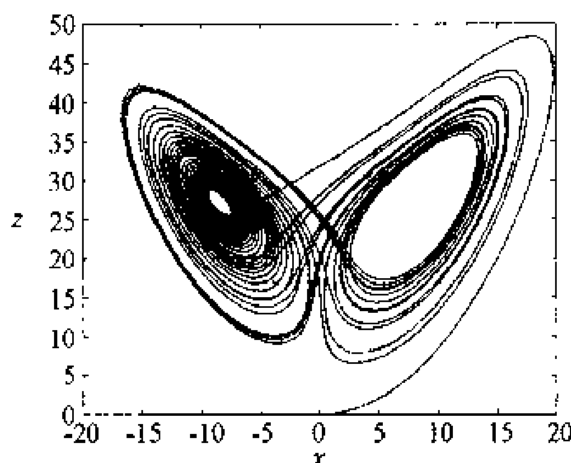


图 7.4 Lorenz 吸引子在 xz 平面上的投影

事实上,用 Matlab 程序很容易画出上面各图。首先建立 M 文件:

```
function    ydot = LORENZED(x,y)
ydot = [ - 10, 10, 0; 28, - 1, - y(1); y(2), 0, - 8/3] * y;
```

然后在 Matlab 命令窗口键入命令:

```
[x, y] = ode45('LORENZED', [0, 40], [1, 0, 0]);
plot3(y(:, 1), y(:, 2), y(:, 3))
```

执行上述命令后就可按 x、y、z 顺序画出的 Lorenz 吸引子。如果接下来键入命令:

```
plot3(y(:, 3), y(:, 2), y(:, 1))
```

就可得到按 z、y、x 顺序画出的 Lorenz 吸引子。进一步若执行下述命令:

```
plot(y(:, 1), y(:, 2))
```

就可得到 Lorenz 吸引子在 xy 平面上的投影图。

事实上,我们计算从 z 轴上的任一点,如从点(0,0,0.0001)点出发的轨道就得不到 Lorenz 吸引子,这是由龙格 - 库塔方法的差分格式引起的。

由例 7.1 可知:从不同角度看三维混沌吸引子的效果是不一样的。

Lorenz 混沌吸引子是稳定与不稳定相互作用的结果。从前面我们已经知道,由于 Lorenz 吸引子的吸引域是整个三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$,因此从 Lorenz 吸引子外部任一点出发的轨道当时间趋于无穷大时都趋于它,而 Lorenz 吸引子内部的轨道却表现出相当不稳定,并以指数形式分离。从数值计算观点来看,我们只计算了过某一点的一根轨道,即我们画出的只是一根轨道。而从 Lorenz 吸引子图上来看,这根轨道似乎要填满一个小区域,这是由于不稳定奇点(特别是鞍点)引起轨道的折叠和拉伸造成的。事实上,Lorenz 吸引子确实具有非零的相体积,并且其维数是比 1 大的非整数。也正因为如此,才将其称为奇怪吸引子。

并不是所有具有混沌吸引子的系统能像 Lorenz 系统一样，能找到一个包含 Lorenz 吸引子的捕捉区和比捕捉区更大的吸引域，这就给我们确定计算混沌吸引子的初值带来一定的困难。

例 7.2 考虑著名的 Rossler 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + (x - c)z \end{cases}$$

它只一个非线性项，因此是最简单的非线性系统之一。然而，这种形式的简单性并不能说明其动力学行为也具有简单性。事实上，当 $a = 0.38, b = 0.3, c = 4.5$ 时，该系统具有单纯的折叠吸引子。下面是从初始点 $x_0 = 0.1, y_0 = 0.2, z_0 = 0.3$ 出发画出的 Rossler 混沌吸引子(如图 7.5 - 图 7.8 所示)。

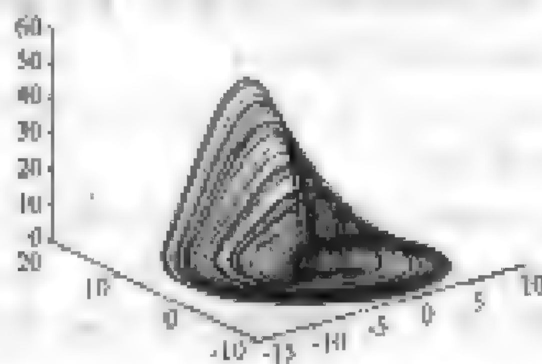


图 7.5 按 y、x、z 顺序画出的 Rossler 吸引子

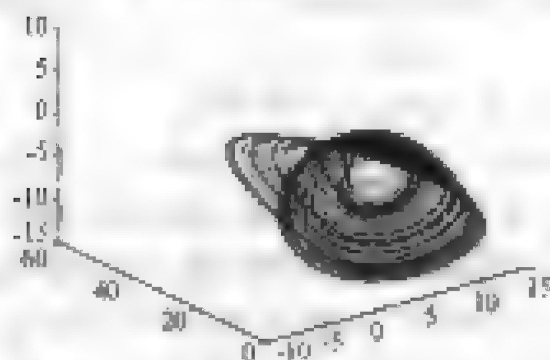


图 7.6 按 z、y、x 顺序画出的 Rossler 吸引子

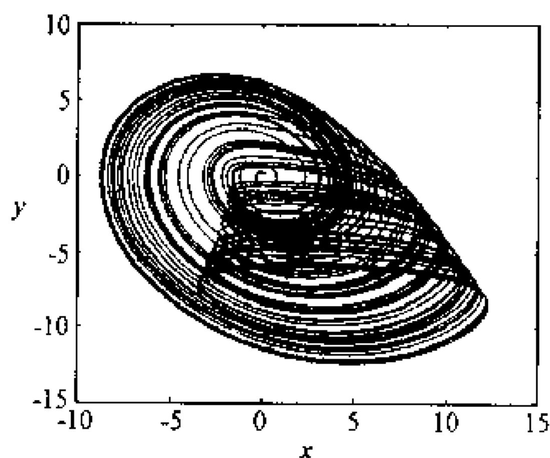


图 7.7　Rossler 吸引子在 xy 平面上的投影

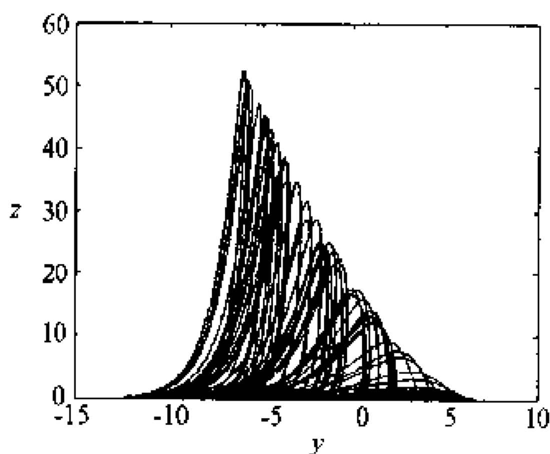


图 7.8　Rossler 吸引子在 yz 平面上的投影

然而，对于 Rossler 系统，我们很难找到一个包含不稳定奇点的捕捉区。

例 7.3　考虑所谓的 Chen 吸引子。这个吸引子存在于下列三维系统之中

$$\begin{cases}\dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a)x + cy - xz \\ \dot{z} = -bz + xy\end{cases}$$

这个系统与 Lorenz 系统相似，但由于系数的不同，这个系统不是 Lorenz 系统的特例，而 Lorenz 系统也不是这个系统的特例。

一个直接计算有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{a-c}{a}x^2 + y^2 + z^2\right) = (c-a)x^2 + cy^2 - bz^2$$

由此可知当 $a > 0, b > 0, c < 0$ 时，该系统是大范围渐近稳定的，因而不存在奇怪

吸引子。因此，要使该系统产生奇怪吸引子，必须破坏这一条件。例如取 $a=35$，$b=3$，$c=28$ 时该系统就出现所谓 Chen 吸引子。只要取初始条件如下：

$$\begin{cases} x(0)=-10 \\ y(0)=0 \\ z(0)=37 \end{cases}$$

通过数值计算画出 Chen 吸引子如图 7.9 所示。

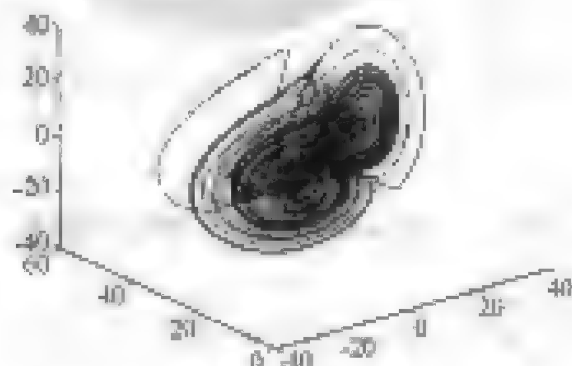


图 7.9 Chen 吸引子

事实上，我们也很难找到 Chen 吸引子的一个捕捉区和一个吸引域。

由于自治的平面系统不会出现混沌吸引子。因此要使一个二维系统出现混沌吸引子，该系统必须是非自治系统。

例 7.4 考虑有外部激励下的 Duffing 方程

$$\ddot{x}+a\dot{x}+x^3=b\cos t$$

其中 $a>0$，$b>0$，$b\cos t$ 是外部激励。上面方程在外部激励下发生振荡，从而可表现出周期运动或混沌运动。

上面的方程等价于非自治平面系统

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-ay-x^3+b\cos t \end{cases}$$

如果取 $a=0.3$ 和 $b=33$，通过计算从 $x_0=0.3$、$y_0=0.5$ 点出发的轨道就可获得 Duffing 混沌吸引子。Duffing 混沌吸引子如图 7.10 所示。

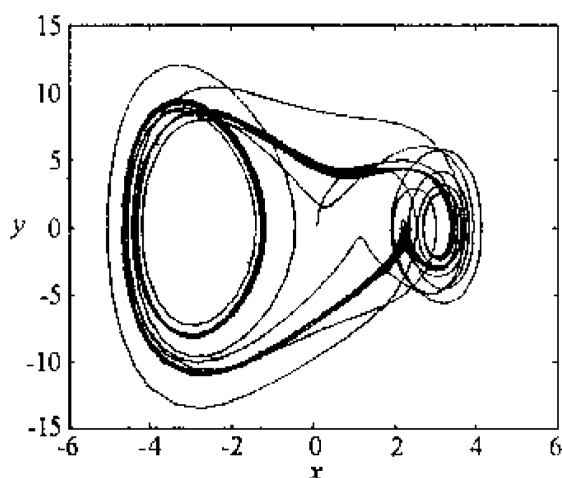


图 7.10 Duffing 系统的混沌吸引子

7.2 Liapunov 指数

在非混沌系统中，初始条件靠得很近的两根轨道，随着时间的增加，要么越来越靠近，要么以慢于指数形式的速度分离。这在理论上来说，其系统的长时期行为是可以预测的。然而，对于混沌系统，我们不可能对系统的长时期行为作出预测。这是由于系统的终值行为敏感地依赖于初始条件，初始条件靠得很近的两根轨道以指数形式的速度分离。

(1) Liapunov 指数的定义。下面我们来定义 n 维连续耗散系统的 Liapunov 指数。考虑 n 维连续系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \tag{7.1}$$

这里 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^{\mathrm{T}}$，且 $\operatorname{div}(f) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} < 0$。设自治系统(7.1)的流为 $\phi(t, \boldsymbol{x})$。现在我们在相空间中任取一个半径为 ρ 的小球 D，那么在 t 时刻，由于流的作用，小球变为类似于椭球体的区域 $\phi(t, D)$（我们称之为类椭球）。由于系统的耗散性，类椭球 $\phi(t, D)$ 的体积随着时间的增加越来越小，即类椭球的体积是收缩的。下面我们要研究类椭球 $\phi(t, D)$ 的主轴 $\rho_k(t)(k = 1, 2, \cdots, n)$ 是怎样按时间发展的。为此，我们定义 Liapunov 指数为

$$L_k = \lim_{t \to +\infty} \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{t} \left| \frac{\rho_k(t)}{\rho} \right| \qquad k = 1, 2, \cdots, n \tag{7.2}$$

当 $\rho \to 0$ 时，球的无穷小形变可以用线性化流来描述。为了计算的目的，我们将给出 Liapunov 指数 L_k 的另一个等价定义。

我们考虑系统(7.1)的初始条件靠得很近的两条轨道：即初始条件分别

$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$及 $\boldsymbol{x}(0)+\delta\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0+\delta\boldsymbol{x}_0$($|\delta\boldsymbol{x}_0|$足够小)。设过这两个初始点的轨道分别为 $\boldsymbol{x}(t)$和 $\boldsymbol{x}(t)+\delta\boldsymbol{x}(t)$,那么有

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)+\delta\boldsymbol{x}(t))$$

由上面两式得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\boldsymbol{x}(t)&=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)+\delta\boldsymbol{x}(t))-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))\\&=Df(\boldsymbol{x}(t))\cdot\delta\boldsymbol{x}(t)+O(|\delta\boldsymbol{x}(t)|^2)\end{aligned}$$

在上式中,扔掉二阶项,得到系统(7.1)的线性化方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\boldsymbol{x}(t)=Df(\boldsymbol{x}(t))\cdot\delta\boldsymbol{x}(t)\tag{7.3}$$

设 $\Psi(t,\boldsymbol{x})$是上面系统的基础解矩阵,那么系统(7.3)的解可表示为

$$\delta\boldsymbol{x}(t)=\Psi(t,\boldsymbol{x})\cdot\delta\boldsymbol{x}(0)=\Psi(t,\boldsymbol{x})\cdot\delta\boldsymbol{x}_0$$

因此,基础解矩阵 $\Psi(t,\boldsymbol{x})$完全描述了线性化流。现在若选择 $\delta\boldsymbol{x}(0)$是初始球的一个适当主轴,那么 $\Psi(t,\boldsymbol{x})$将决定其椭球的相关主轴怎样按时间发展的。设 $\mu_1(t),\mu_2(t),\cdots,\mu_n(t)$是基础解矩阵 $\Psi(t,\boldsymbol{x})$的特征值,这些特征值将描述主轴的拉伸,这就导致我们给出 Liapunov 指数的另一定义。

定义 7.1 设 $\mu_k(t)(k=1,2,\cdots,n)$是基础解矩阵 $\Psi(t,\boldsymbol{x})$的特征根,那么沿着系统(7.1)的轨线 $\boldsymbol{x}(t)$的 Liapunov 指数定义为

$$L_k=\lim_{t\to+\infty}\ln|\mu_k(t)|\tag{7.4}$$

由定义,这些 Liapunov 指数都是实数。

事实上,按上面定义我们仍难计算出 Liapunov 指数。为了计算的目的,我们进一步分析式(7.4)。假设 $z(t)$是对应于特征值 $\mu_k(t)$的特征向量,那么

$$\Psi(t,\boldsymbol{x})z=\mu_k z$$

于是对上式两边取模得

$$|\mu_k|=\frac{|\Psi(t,\boldsymbol{x})z|}{|z|}$$

进一步假设 $\delta\boldsymbol{x}(t)$是线性化方程(7.3)的过点 $\delta\boldsymbol{x}(0)$的解,我们的目的是希望用$\dfrac{|\delta\boldsymbol{x}(t)|}{|\delta\boldsymbol{x}(0)|}$来代替$|\mu_k|$,这样 Liapunov 指数可以表示为

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\frac{|\Psi(t,\boldsymbol{x})\delta\boldsymbol{x}(0)|}{|\delta\boldsymbol{x}(0)|}$$

然而这里依赖于初始条件 $\delta\boldsymbol{x}(0)$的选择。那么对于任给的 $\delta\boldsymbol{x}(0)$,情况又会怎样呢?

定理 7.1 假设 L_1 是最大的 Liapunov 指数,并且进一步假定

$$L_1 \geqslant L_2 \geqslant \cdots \geqslant L_n$$

那么对于任意选择的 $\delta x(0)$,我们有

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\Psi(t,x)\delta x(0)|}{|\delta x(0)|} = L_1$$

这就给我们计算最大特征值提供了更好的途径。事实上,在判断混沌存在性方面,只要求求出系统的最大 Liapunov 指数就可以了。

为了更清楚地了解这个定理,我们将对定理 7.1 作进一步的说明。设 z_k 是特征值 μ_k 所对应的特征向量,这里 $k=1,2,\cdots,n$,那么 $\delta x(0)$ 可表示为

$$\delta x(0) = \sum_{k=1}^{n} c_k z_k$$

因此

$$\delta x(t) = \Psi(t,x) \cdot \delta x(0) = \sum_{i=1}^{n} c_k \Psi(t,x) z_k = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu_k z_k$$

定义

$$\varepsilon_k(t) = L_k - \frac{1}{t}|\mu_k(t)| \qquad k=1,2,\cdots,n \tag{7.5}$$

由 Liapunov 指数的定义,有

$$\lim_{t \to +\infty} \varepsilon_k(t) = 0$$

由式(7.5)有

$$\mu_k = e^{L_k t - \varepsilon_k t + i\theta_k} \qquad k=1,2,\cdots,n$$

于是

$$\begin{aligned}\delta x(t) &= \sum_{k=1}^{n} c_k e^{L_k t - \varepsilon_k t + i\theta_k} z_k \\ &= e^{L_1 t}\left(c_1 e^{i\theta_1 - \varepsilon_1 t} z_1 + \sum_{k=2}^{n} c_k e^{(L_k - L_1 - \varepsilon_k)t} e^{i\theta_k} z_k\right)\end{aligned} \tag{7.6}$$

这就说明,只要 $c_1 \neq 0$,那么就有

$$\ln \frac{|\delta x(t)|}{|\delta x(0)|} = L_1 t + \ln \frac{\xi(t)}{|\delta x(0)|}$$

这里 $\xi(x)$ 是式(7.6)的右边括号中部分。于是

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta x(t)|}{|\delta x(0)|} = L_1$$

对于大的 t,由上式可知有 $|\delta x(t)| \approx e^{L_1 t}|\delta x(0)|$,这就是说只要 $L_1 > 0$,矢量 $\delta x(t)$ 就以 $e^{L_1 t}$ 的速度增长。下面我们一般化上面过程。现在考虑两个初始矢量 $\delta x_1(0)$ 和 $\delta x_2(0)$,并且设

$$|\delta \boldsymbol{x}_1(t)| \approx e^{L_1 t}|\delta \boldsymbol{x}_1(0)|$$

$$|\delta \boldsymbol{x}_2(t)| \approx e^{L_2 t}|\delta \boldsymbol{x}_2(0)|$$

由两个矢量 $\delta \boldsymbol{x}_1(t)$与 $\delta \boldsymbol{x}_2(t)$构成的平行四边形的面积为

$$|V_2(t)| = |\delta \boldsymbol{x}_1(t)||\delta \boldsymbol{x}_2(t)| \approx e^{(L_1+L_2)t}|\delta \boldsymbol{x}_1(0)||\delta \boldsymbol{x}_2(0)| = e^{(L_1+L_2)t}|V_2(0)|$$

由此有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{V_2(t)}{V_2(0)} = L_1 + L_2$$

因此 $L^2 = L_1 + L_2$ 表示面积平均增长率。类似地,我们可以用 k 个初始矢量 $\delta \boldsymbol{x}_1(0),\delta \boldsymbol{x}_2(0),\cdots,\delta \boldsymbol{x}_k(0)$来定义

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\frac{|V_k(t)|}{|V_k(0)|} = L_1 + L_2 + \cdots + L_k$$

这里

$$|V_k(t)| = |\delta \boldsymbol{x}_1(t)|\cdots|\delta \boldsymbol{x}_k(t)| \approx e^{(L_1+\cdots+L_k)t}|V_k(0)|$$

显然 $L^k = L_1 + L_2 + \cdots + L_k$ 描述k维体积增长率。

对于相体积均匀收缩的系统,即散度为

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 常数$$

的系统,显然有

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_n = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

(2) 吸引子的特征。从上面可知,n 维系统的总 Liapunov 指数

$$L^n = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

描述了相体积的平均收缩率。然而对耗散系统,我们有

$$L^n = L_1 + L_2 + \cdots + L_n < 0$$

即相体积是收缩的。混沌系统是指至少有一个正的 Liapunov 指数的系统,这说明在一个方向或更多方向是拉伸的,而整体体积都是收缩的。因此,如果将所有 Liapunov 按大小排序

$$L_1 \geqslant L_2 \geqslant \cdots \geqslant L_n$$

那么对于混沌的耗散系统,必有

$$L_1 > 0 \qquad L_n < 0$$

事实上,$L_1 > 0$ 现已作为混沌的定义。

例 7.5 考虑 Lorenz 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=\sigma(y-x)\\ \dot{y}=rx-y-xz\\ \dot{z}=xy-bz\end{cases}$$

当 $\sigma>0, b>1$ 时,这是一个耗散系统,并且

$$\frac{\partial}{\partial x}[\sigma(y-x)]+\frac{\partial}{\partial y}(rx-y-xz)+\frac{\partial}{\partial z}(xy-bz)=-(\sigma+b+1)<0$$

因此,相体积是均匀收缩的。由上一节可知,当 $\sigma=10, r=28, b=\frac{8}{3}$,Lorenz 系统出现了混沌,且此时

$$L_1+L_2+L_3=-\frac{41}{3}<0 \quad (L_1\geqslant L_2\geqslant L_3)$$

因此必有 $L_1>0, L_3<0$。

(3) 最大 Liapunov 指数的数值计算。对于有混沌吸引子的系统来说,我们不能直接通过数值积分来得到最大的 Liapunov 指数。这是由于最大 Liapunov 指数 L_1 为正,当我们用数值积分的方法来积分线性化方程(7.3)时会产生溢出现象。因此我们必须要用别的方法来计算最大 Liapunov 指数 L_1。

1976 年,Benettin 等人提出了一种计算常微分方程组的最大 Liapunov 指数 L_1 的方法。其方法描述如下:先取两个靠得很近的初始点 $\boldsymbol{p}_0$ 和 $\boldsymbol{q}_0$,这两个点之间的距离记为 $d_0=|\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{q}_0|$,这里要求 d_0 的值很小。然后,在一个小的区间 $[0,\tau]$ 里去积分这个常微分方程组,记通过积分后从 $\boldsymbol{p}_0$ 点出发的轨线在 τ 时刻的值为 $\boldsymbol{p}_1$,而从 $\boldsymbol{q}_0$ 点出发的轨线在 τ 时刻的值为 $\boldsymbol{q}_1$,记这两个点之间的距离为 $d_1=|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q}_1|$。接下来,我们在 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{q}_1$ 的连线上取一点 $\boldsymbol{q}'_1$ 使得,$|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q}'_1|=d_0$,然后我们在区间 $[\tau,2\tau]$ 里去积分这个常微分方程组,记通过积分后从 $\boldsymbol{p}_1$ 点出发的轨线在 τ 时刻的值为 $\boldsymbol{p}_2$,而从 $\boldsymbol{q}'_1$ 点出发的轨线在 τ 时刻的值为 $\boldsymbol{q}_2$,记这两个点之间的距离为 $d_2=|\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{q}_2|$。这样一直下去,我们可以得到一个实正数列 $d_1, d_2, \cdots$,则最大 Liapunov 指数 L_1 可由下式来计算:

$$\ln L_1=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\tau}\sum_{i=1}^{n}\ln(d_i/d_0)$$

这个计算过程可用图 7.11 来说明。

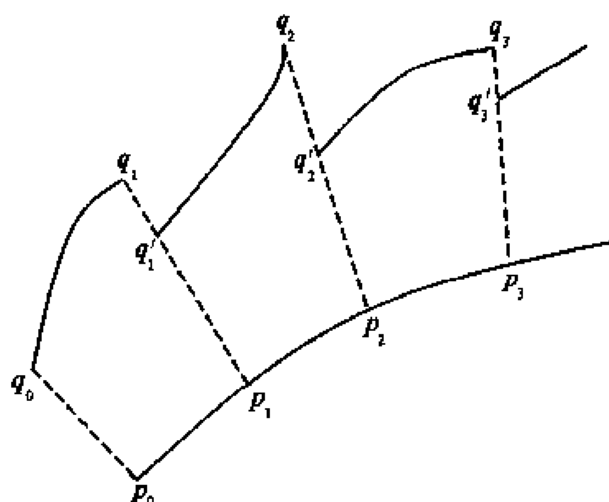


图 7.11　L_1 的计算图

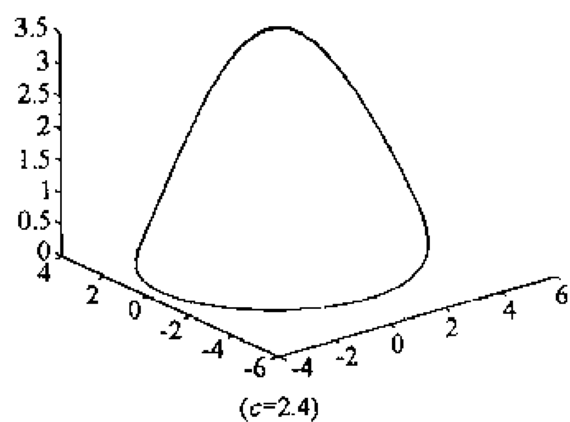
7.3　通向混沌的途径

研究导致混沌产生的机理一直是混沌研究的重要方向之一。就目前来讲，人们已知道多种通向混沌的途径：如倍周期分叉、同宿轨或异宿圈的破裂、KAM 环面破裂等。下面以例子来说明倍周期分叉可导致混沌。

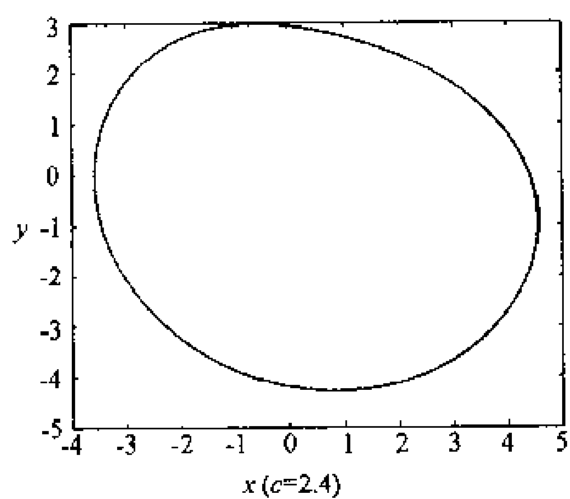
在例 7.2 中，取 $a = b = 0.2$，那么 Rossler 系统可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + 0.2y \\ \dot{z} = 0.2 + (x - c)z \end{cases}$$

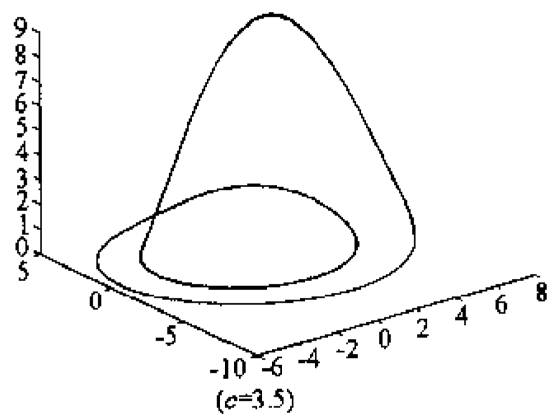
现在我们以 c 为控制参数，用数值计算方法来研究上面系统的分叉情况。图 7.12 是我们画出的随着参数 c 的变化 Rossler 系统的周期轨的周期变化图。



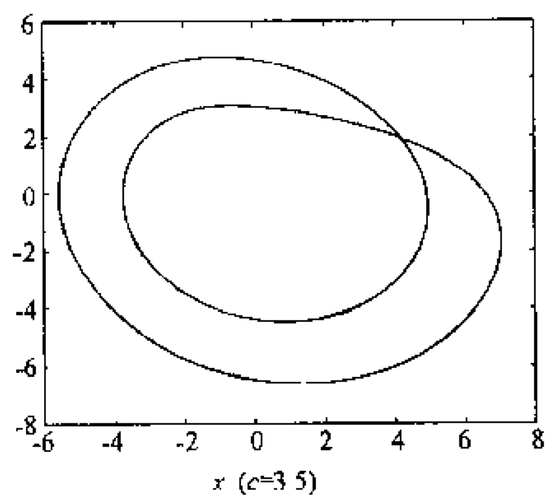
(c=2.4)



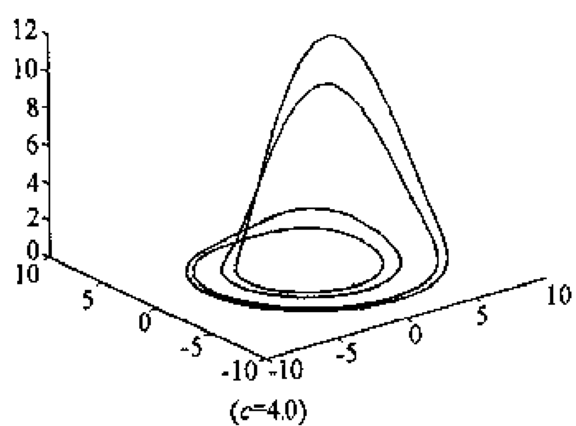
x (c=2.4)



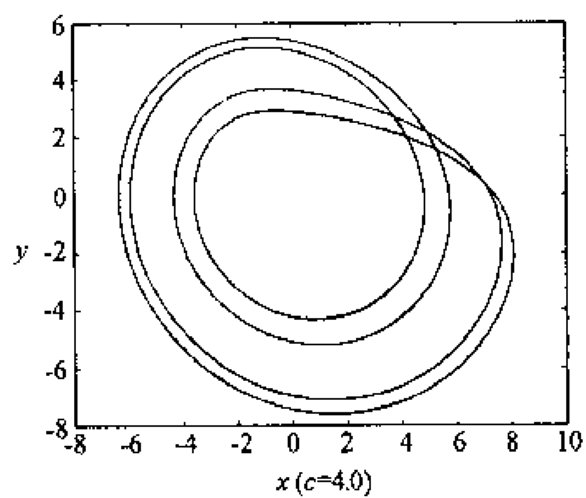
(c=3.5)



x (c=3.5)



(c=4.0)



x (c=4.0)

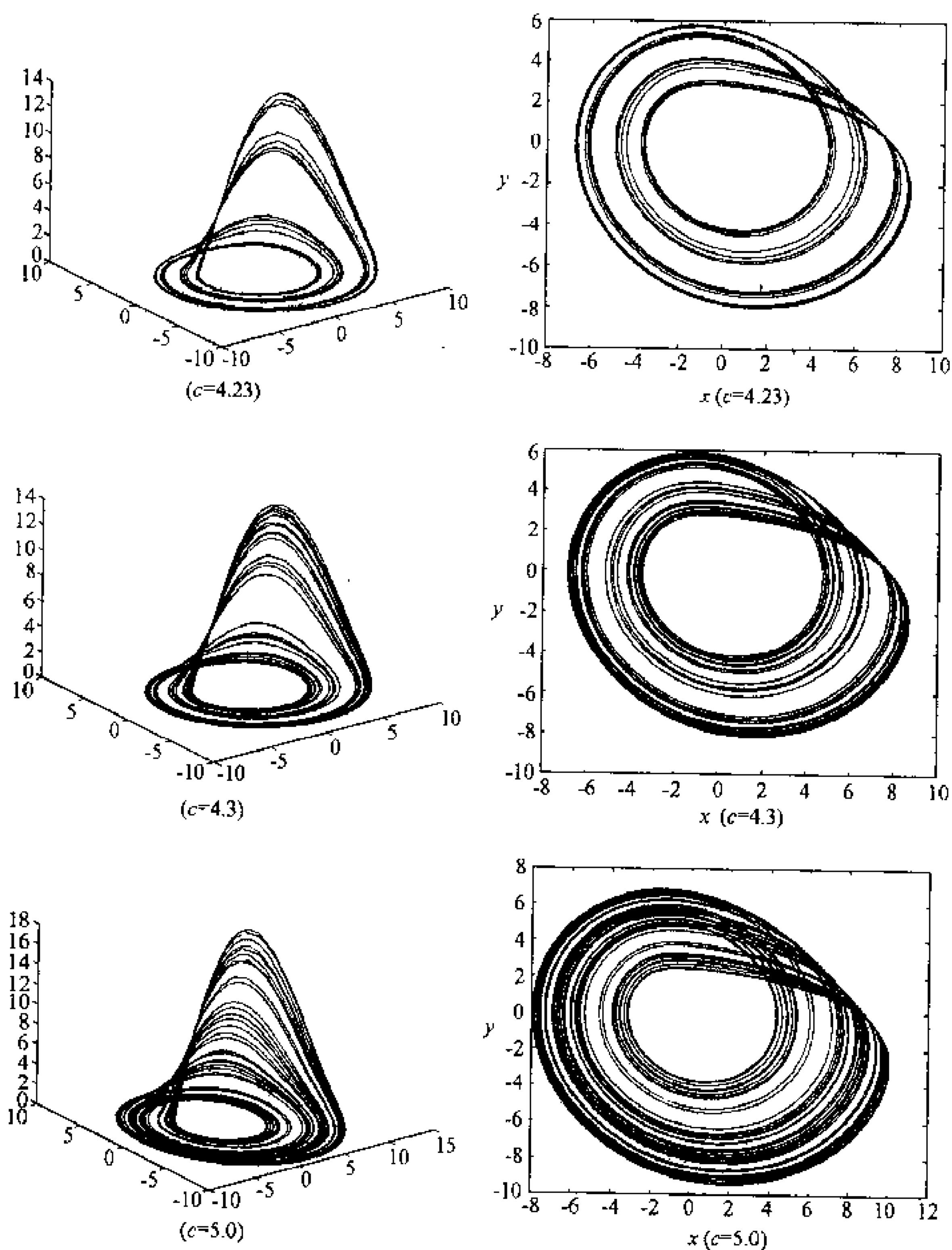


图 7.12　周期轨和混沌吸引子

从各图中可以看出：当 $c=2.4$ 时，Rossler 系统有一个极限环；当 $c=3.5$ 时，Rossler 系统有一个 2 倍周期的周期轨；当 $c=4.0$ 时，Rossler 系统有一个 4 倍周期的周期轨，这样让参数 c 适当地增加下去，Rossler 系统的周期轨的周期按倍数

增长,最终致混沌的产生。

图 7.12 可以用 Matlab 程序很容易画出来。我们以画第一组图为例。首先建立 M 文件:

```
function    ydot = odex (x,y)
ydot = [ - y(2) + y(3); - y(1) + 0.2 * y(2); 0.2 + y(3) * (y(1) - 2.4)];
```

然后在 Matlab 命令窗口键入命令:

```
[x, y] = ode45('odex', [0, 200], [0.1, 0.2, 0.3]);
plot3(y(:, 1), y(:, 2), y(:, 3))
```

执行上述命令后,就可按 x、y、z 顺序画出的 Rossler 系统过该初始点的一条轨道,但这不是一条闭轨。为了画出一条闭轨,我们必须重新选择初始点,第二次计算的初始点可以选为第一次计算结果的最后一组值。如果通过第二次计算后所画出的是一条闭轨,我们接下来就可以键入命令:

```
plot(y(:, 1), y(:, 2))
```

就可画出闭轨在 xy 平面上的投影图。如果通过第二次计算后所画出的还不是一条闭轨,我们可以重复上面过程,直到画出闭轨为止。

同宿轨或异宿圈的破裂以及 KAM 环面破裂都可导致混沌,这是后面的内容。

7.4 KAM 环面和 Arnold 扩散

在给出 KAM 定理之前,我们要先回顾一些经典力学知识。在经典分析力学中,真实运动使作用泛函

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\mathrm{d}t \tag{7.7}$$

取驻值,即 $\delta I = 0$,这里 $\boldsymbol{q}$ 是广义坐标,$L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$是 Lagrange 函数。式(7.7)称为 Hamilton 原理。对于完整系统,由 $\delta I = 0$ 可推出 Lagrange 运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

定义广义动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{7.8}$$

并且假设从式(7.8)可解出 $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t)(i = 1,2,\cdots, n)$。现在作勒让德变换

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$

于是

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \tag{7.9}$$

这里 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)^{\mathrm{T}}$。以式(7.9)代入式(7.7)得

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \right] \mathrm{d}t \tag{7.10}$$

由式(7.10)求变分等于零后可推出 Hamilton 方程

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{7.11}$$

(1) 正则变换。引进一组新的坐标 Q_i 和 $P_i(i = 1, 2, \cdots, n)$，并且假设新旧坐标之间的关系为

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t) \\ P_i = P_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

并且进一步假设上面的变换是可逆的，即从上面的变换中可解出

$$\begin{cases} q_i = q_i(Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, P_1, P_2, \cdots, P_n, t) \\ p_i = p_i(Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, P_1, P_2, \cdots, P_n, t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

显然，通过上面的坐标变换，使旧 Hamilton 函数 $H = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$变为新 Hamilton 函数 $H^* = H^*(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$，其中 $\boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, \cdots, Q_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{P} = (P_1, P_2, \cdots, P_n)^{\mathrm{T}}$。如果上面的坐标变换保持 Hamilton 方程的形式不变，即有

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \dfrac{\partial H^*}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\dfrac{\partial H^*}{\partial Q_i} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

那么这种变换称为正则变换。

下面要解决这样一个问题，什么样的变换是正则变换？Hamilton 方程是从 Hamilton 原理推导出来的，因此新旧坐标都应满足 Hamilton 原理

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \right] \mathrm{d}t = 0$$

及

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i=1}^{n}P_i\dot{Q}_i - H^*(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t)\right]\mathrm{d}t = 0$$

当上面两式同时成立时,上面两式积分号下的函数并不一定要相等,而可以相差任一函数对时间的全微分。例如,相差下列函数的全微分

$$F = F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)$$

显然

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \delta F(\boldsymbol{q}(t_1),\boldsymbol{Q}(t_1),t_1) - \delta F(\boldsymbol{q}(t_0),\boldsymbol{Q}(t_0),t_0) = 0$$

由此可知有

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i - H - \left(\sum_{i=1}^{n}P_i\dot{Q}_i - H^*\right) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\mathrm{d}q_i - H\mathrm{d}t - \left(\sum_{i=1}^{n}P_i\mathrm{d}Q_i - H^*\mathrm{d}t\right) = \mathrm{d}F$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n}P_i\mathrm{d}Q_i + (H^* - H)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial Q_i}\mathrm{d}Q_i + \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t$$

由此有

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F}{\partial q_i} \\ P_i = -\dfrac{\partial F}{\partial Q_i} \\ H^* = H + \dfrac{\partial F}{\partial t} \end{cases}$$

这就是新旧坐标应满足的条件。其中函数 F 称为生成函数(或母函数)。在分析力学中给出了四类最简单的生成函数。在本书中只给出我们要用的一种生成函数

$$S = S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t) \tag{7.12}$$

由该母函数给出的新旧坐标之间的关系为

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial S}{\partial P_i} \qquad i = 1,2,\cdots,n \\ H^* = H + \dfrac{\partial S}{\partial t} \end{cases} \tag{7.13}$$

(2) Hamilton 系统与不变环面。如果能找到正则变换,将旧坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 和 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 变为新坐标作用-角量 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 和 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$,并且使得变换后的 Hamilton 函数 H_0 只为 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 的函数,即 $H_0=H(I_1,I_2,\cdots,I_n)$,那么对应于 Hamilton 函数 H_0 的 Hamilton 方程为

$$\begin{cases}\dot{I}_i=-\dfrac{\partial H_0}{\partial\varphi_i}=0\\ \dot{\varphi}=\dfrac{\partial H_0}{\partial I_i}=\Omega_i=\text{常数}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n \tag{7.14}$$

此时,则称系统为可积 Hamilton 系统。由方程组(7.14)可以解出

$$\begin{cases}I_i(t)=I_i(0)\\ \varphi_i=\Omega_i t+\varphi_i(0)\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$$

由此看出,可积 Hamilton 系统是可求解的,其在相空间中的轨道是规则的,光滑的,所有的轨道都处在由运动积分 $I_i(t)=I_i(0)(i=1,2,\cdots,n)$确定的不变环面上。

例 7.6 考虑有周期驱动而作小角度运动的单摆系统

$$\ddot{\theta}+\theta=f\cos\Omega t$$

它等价于平面系统

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\omega\\ \dot{\omega}=-\theta+f\cos\Omega t\end{cases}$$

用常数变易法,容易求得该系统的解为

$$\theta=A\cos(t+\alpha)+\frac{f}{1-\Omega^2}\cos\Omega t$$

如果作变换

$$\begin{cases}q=\theta-\dfrac{f}{1-\Omega^2}\cos\Omega t\\ p=\omega+\dfrac{\Omega f}{1-\Omega^2}\sin\Omega t\end{cases}$$

则上面的平面系统可化为

$$\begin{cases}\dot{q}=\dfrac{\partial H}{\partial p}=p\\ \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial q}=-q\end{cases}$$

这里 $H=\dfrac{1}{2}(p^2+q^2)$是 Hamilton 函数。再作变换

$$\begin{cases} q = \sqrt{2I}\cos\varphi \\ p = \sqrt{2I}\sin\varphi \end{cases}$$

则 Hamilton 函数 $H(q,p)$变为

$$H(q,p) = H_0 = I$$

因此在(θ,ω)相空间，相轨线方程为

$$\left(\theta - \frac{f}{1-\Omega^2}\cos\Omega t\right)^2 + \left(\omega + \frac{f\Omega}{1-\Omega^2}\sin\Omega t\right)^2 = A^2$$

而其圆心

$$\begin{cases} \theta_0 = \dfrac{f}{1-\Omega^2}\cos\Omega t \\ \omega_0 = -\dfrac{f\Omega}{1-\Omega^2}\sin\Omega t \end{cases}$$

在下面的椭圆

$$\frac{\theta_0^2}{\dfrac{f^2}{(1-\Omega^2)^2}} + \frac{\omega^2}{\dfrac{f^2\Omega^2}{(1-\Omega^2)^2}} = 1$$

或

$$\theta_0^2 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} = \frac{f^2}{(1-\Omega^2)^2}$$

上运动。这就说明相轨在一个环面上运动。

因此，在(θ,ω)相空间中，相点参与了两种运动，一种是在圆周上的运动，频率为 1，另一种是椭圆上的运动，频率为 Ω(如图 7.13)。如果 $\Omega = \frac{m}{n}$(m,n 是整数)，则相轨是闭轨，即相轨绕环面旋转有限圈后又回到起点。如果 $\Omega \neq \frac{m}{n}$(m,n 为正数)，则相轨绕二维环面转无限多圈，并且将无限稠密地覆盖这一不变环面，这时轨道是准周期的(只在椭圆方向作周期运动)，称为拟周期运动，这时在系统

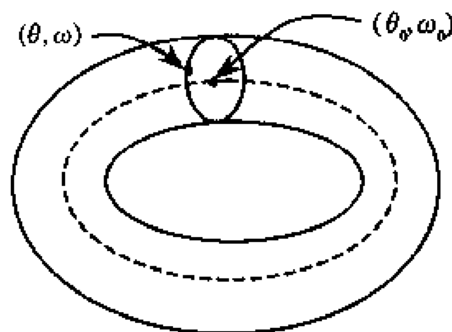


图 7.13 两种运动

中的运动无共振发生。

(3) KAM 定理。事实上,在一般的 Hamilton 系统中,绝大多数是不可积的。下面考虑所谓近可积 Hamilton 系统。

在作用 - 角量坐标系下,假设某 Hamilton 函数可表示为

$$H = H_0(\boldsymbol{I}) + \varepsilon H_1(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) \tag{7.15}$$

这里 $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2, \cdots, I_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)^{\mathrm{T}}$,式(7.15)对应的 Hamilton 方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi_i} = -\varepsilon \dfrac{\partial H_1}{\partial \varphi_i} \\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial I_i} = \dfrac{\partial H_0}{\partial I_i} + \varepsilon \dfrac{\partial H_1}{\partial I_i} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{7.16}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时,Hamilton 方程(7.16)是可积的,它的解为

$$\boldsymbol{I}(t) = \boldsymbol{I}(0) \qquad \boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(0) + \frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{I}}(\boldsymbol{I}(0))t$$

这时整个相空间被分层为一族不变环面 $\boldsymbol{I}(t) =$ 常矢量,在每一个不变环面上的 Hamilton 相流是拟周期的,频率 $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{I}}$。

当 $\varepsilon \neq 0$ 时,在一般情况下可积性遭到破坏。

然而,我们现在知道在一定条件下,大部分不变环面仍然存在。所谓的近可积 Hamilton 系统就具有这一特性。

所谓式(7.15)是近可积的是指 ε 足够小,并且级数

$$H_1(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}} h_k(\boldsymbol{I}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}} \tag{7.17}$$

是收敛的,这里 $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\varphi} = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_n\varphi_n$ 和 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$。显然 $H_1(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi})$关于 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_2$ 是 2π - 周期函数,并且满足

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} H_1(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) \mathrm{d}\varphi_1, \cdots, \mathrm{d}\varphi_n = 0$$

定义正则变换的生成函数

$$S(\boldsymbol{I}', \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{I}' \cdot \boldsymbol{\varphi} + \varepsilon S_1(\boldsymbol{I}', \boldsymbol{\varphi}) + \varepsilon^2 S_2(\boldsymbol{I}', \boldsymbol{\varphi}) + \cdots$$

那么应用式(7.12)和式(7.13)有

$$\begin{cases} \boldsymbol{I} = \dfrac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{I}' + \varepsilon \dfrac{\partial S_1(\boldsymbol{I}', \boldsymbol{\varphi})}{\partial \boldsymbol{\varphi}} + \cdots \\ \boldsymbol{\varphi}' = \dfrac{\partial S}{\partial \boldsymbol{I}'} = \boldsymbol{\varphi} + \varepsilon \dfrac{\partial S_1(\boldsymbol{I}', \boldsymbol{\varphi})}{\partial \boldsymbol{I}'} + \cdots \end{cases} \tag{7.18}$$

由式(7.18)的第一式,有

$$H_0(\boldsymbol{I}) = H_0\left(\boldsymbol{I}' + \varepsilon\frac{\partial S_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})}{\partial\boldsymbol{\varphi}} + \cdots\right)$$

$$= H_0(\boldsymbol{I}') + \varepsilon\frac{\partial H_0(\boldsymbol{I}')}{\partial\boldsymbol{I}'}\cdot\frac{\partial S_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})}{\partial\boldsymbol{\varphi}} + \varepsilon^2\frac{\partial H_0(\boldsymbol{I}')}{\partial\boldsymbol{I}'}\cdot\frac{\partial S_2(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})}{\partial\boldsymbol{\varphi}} + \cdots \tag{7.19}$$

和

$$\varepsilon H_1(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi}) = \varepsilon H_1\left(\boldsymbol{I}' + \varepsilon\frac{S_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})}{\partial\boldsymbol{\varphi}} + \cdots, \boldsymbol{\varphi}\right)$$

$$= \varepsilon H_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi}) + \varepsilon^2\frac{\partial H_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})}{\partial\boldsymbol{I}'}\cdot\frac{\partial S_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})}{\partial\boldsymbol{\varphi}} + \cdots \tag{7.20}$$

由式(7.19)和式(7.20)有

$$H_0(\boldsymbol{I}) + \varepsilon H_1(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi}) = H_0(\boldsymbol{I}') + \varepsilon\left[H_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi}) + \frac{\partial H_0(\boldsymbol{I}')}{\partial\boldsymbol{I}'}\cdot\frac{\partial S_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})}{\partial\boldsymbol{\varphi}}\right] +$$

$$\varepsilon^2\left[\frac{\partial H_0(\boldsymbol{I}')}{\partial\boldsymbol{I}'}\cdot\frac{\partial S_2(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})}{\partial\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial H_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})}{\partial\boldsymbol{I}'}\cdot\frac{\partial S_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})}{\partial\boldsymbol{\varphi}}\right] + \cdots \tag{7.21}$$

现在要消去上式中关于 ε 的一次项,因此令

$$\frac{\partial H_0(\boldsymbol{I}')}{\partial\boldsymbol{I}'}\cdot\frac{\partial S_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})}{\partial\boldsymbol{\varphi}} = -H_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})$$

以

$$S_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in \mathbf{Z}^n\setminus\{0\}} A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{I}')e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varphi}} \tag{7.22}$$

和

$$H_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in \mathbf{Z}^n\setminus\{0\}} h_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{I}')e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varphi}} \tag{7.23}$$

代入上式得

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}')\cdot\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in \mathbf{Z}^n\setminus\{0\}} i\boldsymbol{k}A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{I}')e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varphi}}\right) = -\sum_{\boldsymbol{k}\in \mathbf{Z}^n\setminus\{0\}} h_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{I}')e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varphi}} \tag{7.24}$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}') = \frac{\partial H_0(\boldsymbol{I}')}{\partial\boldsymbol{I}'} = \left(\frac{\partial H_0}{\partial I'_1},\cdots,\frac{\partial H_0}{\partial I'_n}\right)^{\mathrm{T}}$$

比较式(7.24)两边各项的系数有

$$iA_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{I}')\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}') + h_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{I}') = 0$$

于是

$$A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{I}') = \frac{ih_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{I}')}{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}')}$$

由此可以看出,只要$|h_k|\leqslant Me^{-|k|\rho}$和$|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}')|\geqslant C|\boldsymbol{k}|^{-n}$(对于所有$\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$),就能保证式(7.22)和式(7.23)右边的级数都是收敛的。

这样,通过适当地选择 $S_1(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})$将 Hamilton 函数 $H=H_0(\boldsymbol{I})+\varepsilon H_1(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})$变为

$$H=H_0(\boldsymbol{I}')+\varepsilon^2H_2(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi},\varepsilon)$$

类似地,同样可以适当地选择 $S_2(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi})$将 Hamilton 函数 $H=H_0(\boldsymbol{I})+\varepsilon H_1(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})$变为

$$H=H_0(\boldsymbol{I}')+\varepsilon^3H_3(\boldsymbol{I}',\boldsymbol{\varphi},\varepsilon)$$

从理论来讲,这一过程可以无穷地进行下去。

定理 7.2(KAM 定理) 设 $U\subset\mathbf{R}^n$ 是开集,对于充分小的 $\varepsilon>0$,Hamilton 函数

$$H(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi},\varepsilon)=H_0(\boldsymbol{I})+\varepsilon H_1(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})$$

是区域

$$D=\{(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})\mid\boldsymbol{I}\in U,0\leqslant\varphi_i\leqslant2\pi,i=1,2,\cdots,n\}$$

上的实解析函数,并且在 U 上有

$$\det[D^2H_0(\boldsymbol{I})]=\det\left(\frac{\partial^2H_0(\boldsymbol{I})}{\partial I_i\partial I_j}\right)\neq0$$

以及相应的频率 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I})=\dfrac{\partial H_0(\boldsymbol{I})}{\partial\boldsymbol{I}}$对所有的向量$\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$满足条件$|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}|\geqslant C|\boldsymbol{k}|^{-M}$,则对于足够小的 ε,Hamilton 系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\dfrac{\partial H}{\partial\boldsymbol{I}}\\[2mm]\dot{\boldsymbol{I}}=-\dfrac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\varphi}}\end{cases}$$

定义的 Hamilton 相流具有一个 n 维不变环面

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varphi}'=\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi},\varepsilon)\\\boldsymbol{I}'=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varphi},\varepsilon)\end{cases}$$

其中$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$关于$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$都是$2\pi$-周期的,并且关于$\varepsilon$和$\boldsymbol{\varphi}$是实解析的,且$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi},0)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varphi},0)=0$,此不变环面上的流满足

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\partial H_0}{\partial\boldsymbol{I}}$$

而且当 $\varepsilon\to0$ 时,这样的不变环面充分接近未受微扰系统的不变环面。

这个定理并没有给出不变环面测度与 ε 之间的关系,因此难以应用于实际问题。然而,对于一些特殊问题,KAM 定理可以用来解释其运动行为。

下面考虑二自由度的 Hamilton 系统,非线性的引入可导致混沌。二自由度 Hamilton 系统的正则方程为

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H_0}{\partial p_1} & \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H_0}{\partial p_2} \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H_0}{\partial q_1} & \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H_0}{\partial q_2} \end{cases}$$

其相空间是四维的,而 Hamilton 函数的等势面是三维曲面,由于积分 H_0 = 常数的存在把相轨限制在这些等势面上。如果运动积分的数目能和自由度的数目一样多,则系统是可积的。能量积分的存在对三维等势面上的运动有所限制,实际上,在可积系统中每个等势面能被二维环面隔开。对已知初始条件的系统,其动力学行为被限于环面之上。环面上的运动,可用微分方程

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_1 \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2 \end{cases}$$

表示,ω_1 和 ω_2 是常数,称为运动的频率。如果它们相互无关,则运动是准周期的,相轨线布满环面;如果它们满足条件:$\omega_1/\omega_2 = m/n$(m,n 为整相),则轨道是闭轨,运动是周期的。正则坐标 q_1,q_2,p_1,p_2 可换成作用-角量 $I_1,I_2,\varphi_1,\varphi_2$。在可积系统中 I_1 与 I_2 是运动积分,它们使 $H_0(I_1,I_2)=E$,如果在 $H_0(I_1,I_2)$中加入一小的非线性函数 $\varepsilon H_1(I_1,I_2,\varphi_1,\varphi_2)$,即

$$H = H_0(I_1,I_2) + \varepsilon H_1(I_1,I_2,\varphi_1,\varphi_2)$$

KAM 定理指出,对大多数环面而言仅有畸变,而靠近谐振的几个环面可能变成小的混沌层。这里所说的"小",在理论上是指小于 10^{-48}。数值研究表面,即使干扰大一些,很多环面还是能够存在下去。在干扰小时,混沌区由一些小的层构成,相轨在层内无规则地振荡。只要这些层一直保持很小,各层又分开,相轨就不会从一层跑到另一层去,稳定性也不会受到破坏。干扰增加,相邻的混沌层合并,于是混沌层的厚度增加。这种合并其实就是两个混沌层之间的 KAM 环面的破坏。

Arnold 指出,二自由度 Hamilton 系统和多自由度 Hamilton 系统的差别主要在于拓扑上,二维环面可以把三维空间分成环内和环外两个互不相交的部分。但对于高维系统不能这样,例如,三自由度 Hamilton 系统,Hamilton 函数的等势面是五维的,但三维环面不能把五维空间分成两个互不相交的部分。这样对于自由度大于 2 的 Hamilton 系统,KAM 环面经得起干扰,它们不会分成混沌层。事实上,在自由度大于 2 的 Hamilton 系统,混沌层形成了一个单连通区域,如果运动从这个区域上某一点开始,将会扩散到整个区域,这就是 Arnold 扩散。

7.5 平面系统的 Melnikov 方法

Smale 马蹄意义下的混沌是严格数学定义下的混沌。它是由所考虑系统的 Melnikov 函数的简单零点决定系统产生 Smale 马蹄意义下的混沌条件。

我们在第五章已经知道：一个系统的 Poincare 映射的周期点对应于该系统的闭轨，而周期点的稳定性完全决定其对应的闭轨的稳定性。同样，我们将会看到 Poincare 映射与 Smale 马蹄意义下的混沌相联系。

(1) 二维映射的横截同宿点与横截异宿点。第五章所定义的二维非自治系统的横截面同构于 $\mathbf{R}^2$，因此下面只考虑二维映射

$$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$$

为了方便起见，先引进一些定义。设 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2$，过 $\boldsymbol{x}$ 点的正半轨定义为

$$\mathrm{Orb}_+(\boldsymbol{x})=\{f^n(\boldsymbol{x})\mid n\in\mathbf{N}\cup\{0\}\}$$

如果 f 是可逆的，那么过 $\boldsymbol{x}$ 点的负半轨定义为

$$\mathrm{Orb}_-(\boldsymbol{x})=\{f^{-n}(\boldsymbol{x})\mid n\in\mathbf{N}\cup\{0\}\}$$

而过 $\boldsymbol{x}$ 点的轨道定义为

$$\mathrm{Orb}(\boldsymbol{x})=\mathrm{Orb}_+(\boldsymbol{x})\cup\mathrm{Orb}_-(\boldsymbol{x})$$

显然，如果 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的周期为 k 的点，那么

$$\mathrm{Orb}(\boldsymbol{x}_0)=\{\boldsymbol{x}_0,f(\boldsymbol{x}_0),\cdots,f^{k-1}(\boldsymbol{x}_0)\}$$

定义 7.2 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的不动点，如果 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点处的导算子 $Df(\boldsymbol{x}_0)$ 的所有特征值的模都不等于 1，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 f 的双曲不动点；如果导算子 $Df(\boldsymbol{x}_0)$ 的两个特征值中有一个特征值的模大于 1，而另一个特征值的模小于 1，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 f 的鞍点。

定义 7.3 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的周期为 k 的点，如果 $\boldsymbol{x}_0$ 点是 f^k 的双曲不动点，那么我们称周期轨道 $\mathrm{Orb}(\boldsymbol{x}_0)$ 为双曲周期轨。

对于映射，可以像微分方程一样定义在不动点处的不变流形，同样有所谓的中心流形定理，这些不在这里给出。设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的鞍点，由映射的中心流形定理可知，存在包含 $\boldsymbol{x}_0$ 点的邻域 $U\subset\mathbf{R}^2$ 以及 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点局部稳定流形：

$$W^s_{loc}(\boldsymbol{x}_0)=\{\boldsymbol{x}\in U\mid \text{当 } n\to+\infty \text{ 时}, f^n(\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{x}_0, \text{且 } \forall n\in\mathbf{N}\cup\{0\}, f^n(\boldsymbol{x})\in U\}$$

和 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点局部不稳定流形：

$$W^u_{loc}(\boldsymbol{x}_0)=\{\boldsymbol{x}\in U\mid \text{当 } n\to+\infty \text{ 时}, f^{-n}(\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{x}_0, \text{且 } \forall n\in\mathbf{N}\cup\{0\}, f^{-n}(\boldsymbol{x})\in U\}$$

并且 $W^s_{loc}(\boldsymbol{x}_0)$ 和 $W^u_{loc}(\boldsymbol{x}_0)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点分别与导算子 $Df(\boldsymbol{x}_0)$ 的两个特征子空间 $E^s_{\boldsymbol{x}_0}$

和 $E^u_{x_0}$ 相切。

若 x_0 是 f 的周期为 k 的点,我们也可类似地定义周期轨道 Orb(x_0)的稳定流形和不稳定流形如下

$$W^s(x_0,f)=\bigcup_{i=0}^{k-1}W^s(f^i(x_0),f^{k-i})$$

$$W^u(x_0,f)=\bigcup_{i=0}^{k-1}W^u(f^i(x_0),f^{k-i})$$

有了映射的稳定流形和不稳定流形定义之后,类似于常微分方程组,对于映射我们有同宿点和异宿点的概念。

定义 7.4 设 x_0 是 f 的鞍点,若 $q\in W^s(x_0)\cap W^u(x_0)$,并且 $q\neq x_0$,那么称 q 为 f 的同宿点,如果进一步有 $W^s(x_0)$ 与 $W^u(x_0)$ 在 q 处横截相交,则称 q 为 f 的横截同宿点。

由稳定流形和不稳定流形定义可知:如果 q 是 f 点的同宿点,那么对于任意整数 n,$f^n(q)$ 也是 f 点的同宿点。这就是说若 f 存在一个同宿点,那么必存在 f 的无穷多个同宿点。在数学上已经证明:如果 f 存在一个横截同宿点,则 f 具有 Smale 马蹄意义下的混沌。

定义 7.5 设 x_1 和 x_2 是 f 两个不同鞍点,设 $W^s(x_1)\cap W^u(x_2)$(或 $W^u(x_1)\cap W^s(x_2)$)是非空的,若 $q\in W^s(x_1)\cap W^u(x_2)$(或 $q\in W^u(x_1)\cap W^s(x_2)$),并且 $q\neq x_1$、$q\neq x_2$,那么称 q 为 f 的异宿点,如果进一步有 $W^s(x_1)$ 与 $W^u(x_2)$(或 $W^u(x_1)$ 与 $W^s(x_2)$)在 q 处横截相交,则称 q 为 f 的横截异宿点。

现设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 f 的 n 个各不相同的鞍点,并且设 $W^s(x_i)$ 与 $W^u(x_{i+1})$ 横截相交于 q_i 处(这里 $i=1,2,\cdots,n,n+1,q_{n+1}=q_1$),那么称 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为 f 的 n - 横截环。已经证明:如果 f 存在一个 n - 横截环,则 f 具有 Smale 马蹄意义下的混沌。

上面的横截同宿点理论与 n - 横截环理论为我们用 Poincare 映射研究二维非自治系统在 Smale 马蹄意义下的混沌提供了基础。

(2) 二维 Hamilton 系统的扰动系统的 Melnikov 函数。考虑如下二维扰动 Hamilton 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial y}+\varepsilon g_1(x,y,t)\\[2ex]\dot{y}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}+\varepsilon g_2(x,y,t)\end{cases}\tag{7.25}$$

这里 $H=H(x,y)$ 是未扰动系统的 Hamilton 函数。为了方便起见,将上面方程组写成如下矢量形式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = J_2 \cdot \nabla H(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) \tag{7.26}$$

这里 $\boldsymbol{x} = (x, y)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^2$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = J_2 \cdot \nabla H(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) = (g_1(\boldsymbol{x}, t), g_2(\boldsymbol{x}, t))^{\mathrm{T}} \in C^r$ $(r \geqslant 2)$，而

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

是反对称矩阵，$\nabla H(\boldsymbol{x}) = \left(\dfrac{\partial H}{\partial x}, \dfrac{\partial H}{\partial y}\right)$是梯度算子。进一步假设 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)$关于时间 t 是以周期为 T 的周期函数，即有 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, T + t)$。

假设 $\varepsilon = 0$ 时，未扰动的 Hamilton 系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = J_2 \cdot \nabla H(\boldsymbol{x}) \tag{7.27}$$

具有下列性质：

① 系统(7.27)具有一根同宿轨 $\boldsymbol{q}^0(t) = (x_0(t), y_0(t))^{\mathrm{T}}$ 和一个双曲鞍点 $\boldsymbol{p}_0$。

② 记 $\Gamma^0 = \{\boldsymbol{q}^0(t) \mid t \in \mathbf{R}\} \cup \{\boldsymbol{p}_0\}$，设 Γ^0 的内部由一族闭轨 $\boldsymbol{q}^\alpha(t)$ $(\alpha \in (-1, 0))$连续充满。若记 $d(\boldsymbol{x}, \Gamma^0) = \inf\limits_{\boldsymbol{q} \in \Gamma^0} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}|$，那么有$\lim\limits_{\alpha \to 0} \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} d(\boldsymbol{q}^\alpha(t), \Gamma^0) = 0$。

③ 记 $h_\alpha = H(\boldsymbol{q}^\alpha(t))$，设 T^α 是闭轨$\boldsymbol{q}^\alpha(t)$的周期，那么 T^α 关于 h_α 是可微的，并且在 Γ^0 的内部有 $\mathrm{d}T^\alpha/\mathrm{d}h_\alpha > 0$。

若奇点 $\boldsymbol{p}_0$ 是原点，这些性质的几何表示如图 7.14 所示。

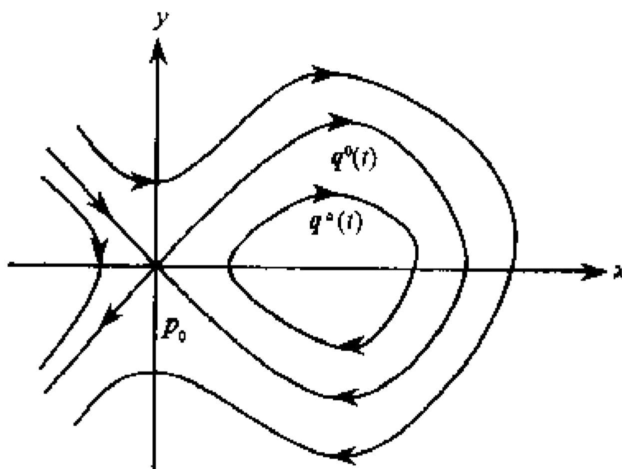


图 7.14　未扰动 Hamilton 系统的相图

为了定义 Poincare 映射的横截面，我们将方程组(7.26)提升为三维自治系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)+\epsilon g(x,\theta)\\ \dot{\theta}=1\end{cases}$$

取横截面

$$\Sigma^{t_0}=\{(x,\theta)\in\mathbf{R}^2\times S^1\mid\theta=t_0\in[0,T]\}$$

其中 T 是圆周 S^1 的周长。设 $q_\epsilon(t,t_0)$ 是在 $t=t_0$ 时方程组(7.26)过点 x 的解，因为从 Σ^{t_0} 上的点出发的轨线第一次返回 Σ^{t_0} 所需的时间是 T,根据第五章的内容,可以定义 Poincare 映射如下

$$P_\epsilon^{t_0}:\Sigma^{t_0}\to\Sigma^{t_0}$$

$$q_\epsilon(t_0,t_0)\to q_\epsilon(t_0+T,t_0)$$

从前面的知识,我们可以知道如果 Poincare 映射 $P_\epsilon^{t_0}$ 存在横截同宿点,那么方程组(7.26)具有 Smale 马蹄意义下的混沌。下面我们要首先回答是否存在 Poincare 映射 $P_\epsilon^{t_0}$ 的双曲鞍点以及其他一些我们必须了解的信息。

定理 7.3 对于方程组(7.26)有下列结论:

① 当 $0<\epsilon\ll1$ 时,方程组(7.26)有唯一双曲周期轨道 $r_\epsilon^0(t)=p_0+O(\epsilon)$，而 Poincare 映射 $P_\epsilon^{t_0}$ 存在唯一双曲点 $p_\epsilon^{t_0}=p_0+O(\epsilon)$;

② 当 $0<\epsilon\ll1$ 时,方程组(7.26)的双曲周期轨道

$$r_\epsilon^0(t)=p_0+O(\epsilon)$$

的局部稳定流形 $W_{loc}^s(r_\epsilon^0(t))$ 和局部不稳定流形 $W_{loc}^u(r_\epsilon^0(t))$ 是 C^r 接近未扰动系统的周期轨道 $p_0\times S^1$ 的局部稳定流形和局部不稳定流形。初始点在横截面 Σ^{t_0} 上,分别位于局部稳定流形 $W_{loc}^s(r_\epsilon^0(t))$ 和局部不稳定流形 $W_{loc}^u(r_\epsilon^0(t))$ 上的轨线 $q_\epsilon^s(t,t_0)$ 与 $q_\epsilon^u(t,t_0)$ 关于 ϵ 的展开式

$$q_\epsilon^s(t,t_0)=q^0(t-t_0)+\epsilon q_1^s(t,t_0)+O(\epsilon^2)\qquad t\in[t_0,+\infty)\tag{7.28}$$

$$q_\epsilon^u(t,t_0)=q^0(t-t_0)+\epsilon q_1^u(t,t_0)+O(\epsilon^2)\qquad t\in(-\infty,t_0]\tag{7.29}$$

当 $t\geqslant t_0$ 时, $q_1^s(t,t_0)$ 满足方程

$$\dot{q}_1^s(t,t_0)=Df(q^0(t-t_0))\cdot q_1^s(t,t_0)+g(q^0(t-t_0),t)\tag{7.30}$$

当 $t\leqslant t_0$ 时, $q_1^u(t,t_0)$ 满足方程

$$\dot{q}_1^u(t,t_0)=Df(q^0(t-t_0))\cdot q_1^u(t,t_0)+g(q^0(t-t_0),t)\tag{7.31}$$

上面的定理为我们提供了许多信息。下面将利用这些信息来定义一个用来定义 Melnikov 函数的“距离函数”。双曲鞍点 $p_\epsilon^{t_0}$ 的稳定流形 $W^s(p_\epsilon^{t_0})$ 和不稳定流形 $W^u(p_\epsilon^{t_0})$ 分别与横截面 Σ^{t_0} 的交点可能不只一个,设 $q_\epsilon^s(t_0)=q_\epsilon^s(t_0,t_0)$ 与 $q_\epsilon^u(t_0)=q_\epsilon^u(t_0,t_0)$ 分别是稳定流形 $W^s(p_\epsilon^{t_0})$ 和不稳定流形 $W^u(p_\epsilon^{t_0})$ 在横截面 Σ^{t_0} 上靠得最近的两个点。$q^0(0)$ 是未扰动系统的同宿轨上的一个点, $f(q^0(0))=$

$(f_1(\boldsymbol{q}^0(0)), f_2(\boldsymbol{q}^0(0)))^{\mathrm{T}}$ 是该同宿轨在 $\boldsymbol{q}^0(0)$ 点的切线方向，因此该同宿轨在 $\boldsymbol{q}^0(0)$ 点的法线方向为

$$\boldsymbol{f}^{\perp}(\boldsymbol{q}^0(0)) = (-f_2(\boldsymbol{q}^0(0)), f_1(\boldsymbol{q}^0(0)))^{\mathrm{T}}$$

于是该同宿轨在 $\boldsymbol{q}^0(0)$ 点的单位法线方向为

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{f}^{\perp}(\boldsymbol{q}^0(0))}{|\boldsymbol{f}^{\perp}(\boldsymbol{q}^0(0))|} = \frac{\boldsymbol{f}^{\perp}(\boldsymbol{q}^0(0))}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(0))|}$$

定义距离函数如下

$$d(t_0) = (\boldsymbol{q}_\varepsilon^u(t_0) - \boldsymbol{q}_\varepsilon^s(t_0)) \cdot \boldsymbol{n}$$

记 $\boldsymbol{q}_\varepsilon^u(t_0) - \boldsymbol{q}_\varepsilon^s(t_0) = (\alpha, \beta)^{\mathrm{T}}$，那么有

$$\begin{aligned} d(t_0) &= \frac{(\alpha, \beta)^{\mathrm{T}} \cdot (-f_2(\boldsymbol{q}^0(0)), f_1(\boldsymbol{q}^0(0)))^{\mathrm{T}}}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(0))|} \\ &= \frac{\beta f_1(\boldsymbol{q}^0(0)) - \alpha f_2(\boldsymbol{q}^0(0))}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(0))|} \\ &= \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(0)) \Lambda (\boldsymbol{q}_\varepsilon^u(t_0) - \boldsymbol{q}_\varepsilon^s(t_0))}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(0))|} \end{aligned} \tag{7.32}$$

这里 Λ 是投影算子，其具体运算如下：若 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{a} \Lambda \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = (-a_2, a_1)^{\mathrm{T}} \cdot (b_1, b_2)^{\mathrm{T}}$$

以式(7.28)和式(7.29)代入式(7.32)得

$$d(t_0) = \varepsilon \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(0)) \Lambda (\boldsymbol{q}_1^u(t_0) - \boldsymbol{q}_1^s(t_0))}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(0))|} + O(\varepsilon^2) \tag{7.33}$$

其中 $\boldsymbol{q}_1^u(t_0) = \boldsymbol{q}_1^u(t_0, t_0)$，$\boldsymbol{q}_1^s(t_0) = \boldsymbol{q}_1^s(t_0, t_0)$。

在式(7.33)中，$\boldsymbol{q}_1^u(t_0)$和 $\boldsymbol{q}_1^s(t_0)$的值仍然是未知的。为了计算出这两个向量，我们引入记号

$$\begin{cases} \Delta^u(t, t_0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t - t_0)) \Lambda \boldsymbol{q}_1^u(t, t_0) \\ \Delta^s(t, t_0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t - t_0)) \Lambda \boldsymbol{q}_1^s(t, t_0) \end{cases} \tag{7.34}$$

一个直接计算得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Delta^s(t, t_0) = {} & [D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t - t_0)) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}^0(t - t_0)] \Lambda \boldsymbol{q}_1^s(t, t_0) + \\ & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t - t_0)) \Lambda \dot{\boldsymbol{q}}_1^s(t, t_0) \end{aligned} \tag{7.35}$$

以 $\dot{\boldsymbol{q}}^0(t - t_0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t - t_0))$和式(7.30)代入上式，得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Delta^s(t, t_0) = {} & [D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t - t_0)) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t - t_0)] \Lambda \boldsymbol{q}_1^s(t, t_0) + \\ & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t - t_0)) \Lambda [D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t - t_0)) \cdot \boldsymbol{q}_1^s(t, t_0) + \end{aligned}$$

$$g(q^0(t-t_0),t)] \tag{7.36}$$

为了方便计算,我们记 $f(q^0(t-t_0))=(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$、$q_1^s(t,t_0)=(b_1,b_2)^{\mathrm{T}}$ 以及

$$Df(q^0(t-t_0))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

于是利用 $a\Lambda b=-(b\Lambda a)$,有

$$\begin{aligned}
&[Df(q^0(t-t_0))\cdot f(q^0(t-t_0))]\Lambda q_1^s(t,t_0)+f(q^0(t-t_0)) \\
&\Lambda[Df(q^0(t-t_0))\cdot q_1^s(t,t_0)] \\
&=\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right]\Lambda\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right]\Lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
&=(a_{11}+a_{22})(a_1b_2-a_2b_1) \\
&=\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}a\Lambda b \\
&=[\mathrm{tr}Df(q^0(t-t_0))]\Delta^s(t,t_0)
\end{aligned} \tag{7.37}$$

但

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}Df(q^0(t-t_0)) &= \frac{\partial f_1(q^0(t-t_0))}{\partial x}+\frac{\partial f_2(q^0(t-t_0))}{\partial y} \\
&= \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}=0
\end{aligned}$$

于是利用式(7.37)和上式,式(7.36)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta^s(t,t_0)=f(q^0(t-t_0))\Lambda g(q^0(t-t_0),t)$$

将上式两边从 t_0 到 $+\infty$ 积分得

$$\begin{aligned}
&\Delta^s(+\infty,t_0)-\Delta^s(t_0,t_0) \\
&=\int_{t_0}^{+\infty} f(q^0(t-t_0))\Lambda g(q^0(t-t_0),t)\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{7.38}$$

因为 p_0 是未扰动 Hamilton 系统的一个同宿点,于是有

$$\lim_{t\to+\infty} f(q^0(t-t_0))=f(p_0)=0$$

因此有

$$\Delta^s(+\infty,t_0)=\lim_{t\to+\infty}\Delta^s(t,t_0)=\lim_{t\to+\infty}f(q^0(t-t_0))\Lambda q_1^s(t,s)=0$$

从而式(7.38)可写为

$$\Delta^s(t_0,t_0)=-\int_{t_0}^{+\infty} f(q^0(t-t_0))\Lambda g(q^0(t-t_0),t)\mathrm{d}t \tag{7.39}$$

同理可证

$$\Delta^{u}(t_0,t_0)=\int_{-\infty}^{t_0}f(\boldsymbol{q}^0(t-t_0))\wedge\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^0(t-t_0),t)\mathrm{d}t \tag{7.40}$$

由式(7.39)和式(7.40),有

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{q}^0(0))\wedge(\boldsymbol{q}_1^u(t_0)-\boldsymbol{q}_1^s(t_0))\\&=\Delta^u(t_0,t_0)-\Delta^s(t_0,t_0)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\boldsymbol{q}^0(t-t_0))\wedge\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^0(t-t_0),t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(t_0)&=\varepsilon\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}f(\boldsymbol{q}^0(t-t_0))\wedge\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^0(t-t_0),t)\mathrm{d}t}{|f(\boldsymbol{q}^0(0))|}+O(\varepsilon^2)\\&=\varepsilon\frac{M(t_0)}{|f(\boldsymbol{q}^0(0))|}+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{7.41}$$

这里

$$M(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\boldsymbol{q}^0(t-t_0))\wedge\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^0(t-t_0),t)\mathrm{d}t \tag{7.42}$$

称为 Melnikov 函数。

如果 $M(t_0)$与扰动参数 ε 无关并且存在简单零点 τ,即 $M(\tau)=0$,由式(7.41)可知距离函数 $d(t_0)$在 τ 的附近一定改变符号,因为法向量 $\boldsymbol{n}$ 是一个常微量,由此可知一定存在 τ',使得对于充分小的扰动参数 ε 有 $\boldsymbol{q}_\varepsilon^u(\tau')=\boldsymbol{q}_\varepsilon^s(\tau')$。换句话说,Poincare 映射 $P_\varepsilon^{t_0}$ 存在横截同宿点。这就说明系统具有 Smale 马蹄意义下的混沌。

如果存在函数 $G(x,y,t)=G(\boldsymbol{x},t)$使得

$$g_1=\frac{\partial G}{\partial y}\qquad g_2=-\frac{\partial G}{\partial x}$$

那么式(7.42)可写为

$$\begin{aligned}M(t_0)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\boldsymbol{q}^0(t-t_0))\wedge\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^0(t-t_0),t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\{H(\boldsymbol{q}^0(t-t_0)),G(\boldsymbol{q}^0(t-t_0),t)\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

这里$\{H,G\}=\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}$是函数$H$和$G$的Poisson括号。

如果作变换$t\to t+t_0$,那么式(7.42)可写为

$$M(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t))\Lambda\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^0(t),t+t_0)\mathrm{d}t$$

下面将给出具有异宿轨的平面Hamilton系统的Melnikov函数。如果$\varepsilon=0$时,系统(7.26)有n个双曲鞍点$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n(n\geq 2)$,从$\boldsymbol{p}_i$到$\boldsymbol{p}_{i+1}$有异宿轨$\boldsymbol{q}_i^0(t)$连接$(i=1,2,\cdots,n-1)$,从$\boldsymbol{p}_n$到$\boldsymbol{p}_1$有异宿轨$\boldsymbol{q}_n^0(t)$连接,这样$\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n\boldsymbol{p}_1$形成一个有向异宿圈。类似于同宿轨情况,我们可以得出关于第i条异宿轨的Melnikov函数为

$$M_i(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}_i^0(t))\Lambda\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_i^0(t),t+t_0)\mathrm{d}t$$

同样可证,当$M_i(t_0)=0$有简单零点时,系统具有Smale马蹄意义下的混沌。

(3) 二维非Hamilton系统的扰动系统的Melnikov函数。考虑如下扰动系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\varepsilon\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t) \tag{7.43}$$

这里$\boldsymbol{x}=(x,y)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2$,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$不是某一函数生成的Hamilton的矢量场,而$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t)=(g_1(\boldsymbol{x},t),g_2(\boldsymbol{x},t))^{\mathrm{T}}\in C^r(r\geq 2)$是关于时间$t$以$T$为周期的周期函数。进一步假设当$\varepsilon=0$时,系统(7.26)有双曲鞍点$\boldsymbol{p}_0$和连接这个鞍点同宿轨$\boldsymbol{q}_0(t)$。我们可以证明该系统的Melnikov函数为

$$M(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(t-t_0))\Lambda\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^0(t-t_0),t)\cdot\exp\left[-\int_0^{t-t_0}\mathrm{tr}D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^0(\tau))\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t$$

类似地,可以证明:如果$M(t_0)$存在简单零点,那么系统(7.43)具有Smale马蹄意义下的混沌。

下面举例来说明上面理论的应用。

例7.7 考虑如下平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=x-x^3+\varepsilon(\gamma\cos\omega t-\delta y)\end{cases}$$

当$\varepsilon=0$时,未扰动系统有三个奇点:两个中心$(\pm 1,0)$和一个鞍点$(0,0)$。未扰动系统还有一个首次积分:

$$H(x,y)=\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}=c\quad(c\text{ 为常数})$$

显然,当$t\to\pm\infty$时进入鞍点$(0,0)$的轨线必有$c=0$,即有

$$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}=0$$

这是两条同宿轨，通过积分可得出它们关于时间的表示为

$$\Gamma^+: \boldsymbol{q}_+^0(t)=(\sqrt{2}\operatorname{sech}t,\ -\sqrt{2}\operatorname{sech}t\cdot\tanh t)$$

$$\Gamma^-: \boldsymbol{q}_-^0(t)=-\boldsymbol{q}_+^0(t)$$

同宿轨图像如图 7.15 所示。

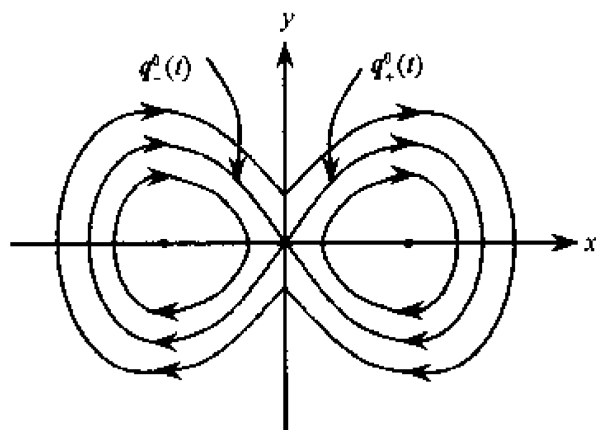


图 7.15　同宿轨

并且未扰动系统在每一条同宿轨内部有一单参数族周期轨道，这些周期轨道可通过积分求出并且可用椭圆函数表示：

$$\boldsymbol{q}_+^\alpha(t)=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\alpha^2}}\operatorname{dn}\left(\frac{t}{\sqrt{2-\alpha^2}},\alpha\right),\frac{-\sqrt{2}\alpha^2}{2-\alpha^2}\operatorname{sn}\left(\frac{t}{\sqrt{2-\alpha^2}},\alpha\right)\cdot\operatorname{cn}\left(\frac{t}{\sqrt{2-\alpha^2}},\alpha\right)\right)$$

$$\boldsymbol{q}_-^\alpha(t)=-\boldsymbol{q}_+^\alpha(t)$$

这里 dn、sn 和 cn 是 Jacobi 椭圆函数，而 α 是椭圆模。显然，当 $\alpha\to1$ 时，$\boldsymbol{q}_\pm^\alpha\to\boldsymbol{q}_\pm^0\cup\{(0,0)\}$，而当 $\alpha\to0$ 时，$\boldsymbol{q}_\pm^\alpha\to(\pm1,0)$。选取初始条件

$$\boldsymbol{q}_\pm^\alpha(0)=\left(\pm\sqrt{\frac{2}{2-\alpha^2}},0\right)$$

那么我们有

$$H(\boldsymbol{q}_\pm^\alpha(t))=H(\boldsymbol{q}_\pm^0(t))=\frac{\alpha^2-1}{2-\alpha^2}=h_\alpha$$

这些周期轨道的周期为

$$T^\alpha=2K(\alpha)\sqrt{2-\alpha^2}$$

这里 $K(\alpha)$是第一类椭圆积分。T^α 关于椭圆模 α 是单调递增的，且$\lim\limits_{\alpha\to0}T^\alpha=2\pi$ 和以及$\lim\limits_{\alpha\to1}T^\alpha=+\infty$，以及

$$\frac{\mathrm{d}T^{\alpha}}{\mathrm{d}h_{\alpha}}=\frac{\mathrm{d}T^{\alpha}/\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}H/\mathrm{d}\alpha}>0$$

因此,未扰动系统满足三条假设。

显然,我们有

$$f(x,y)=(y,x-x^{3})^{\mathrm{T}}$$

$$g(x,y)=(0,\gamma\cos\omega t-\delta y)^{\mathrm{T}}$$

因此,对于同宿轨道 q_{+}^{0} 的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned}M(t_{0})&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(q_{+}^{0}(t))\Lambda g(q_{+}^{0}(t),t+t_{0})\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}y_{+}^{0}(t)[\gamma\cos\omega(t+t_{0})-\delta y_{+}^{0}(t)]\mathrm{d}t\\&=-\int_{-\infty}^{+\infty}[\sqrt{2}\gamma\operatorname{sech}t\cdot\tanh t\cdot\cos\omega(t+t_{0})+2\delta\operatorname{sech}^{2}t\cdot\tanh^{2}t]\mathrm{d}t\\&=-\frac{4\delta}{3}+\sqrt{2}\gamma\pi\omega\operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\sin\omega t_{0}\end{aligned}$$

显然,当下列条件

$$\left|\gamma\omega\operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\right|>\frac{4|\delta|}{3\sqrt{2}\pi}$$

成立时,Melnikov 函数 $M(t_{0})$有简单零点。这就说明在上面条件下,所考虑的扰动系统具有 Smale 马蹄意义下的混沌。

例 7.8　Dufling 方程受弱周期强迫时的混沌运动。下面方程

$$\ddot{x}+x-x^{3}=-\varepsilon\delta\dot{x}+\varepsilon f\cos\omega t$$

称为受迫的 Duffing 方程,这里 $\delta>0,f>0,0<\varepsilon\ll1$。上式等价于

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\\dot{y}=-x+x^{3}-\varepsilon\delta y+\varepsilon f\cos\omega t\end{cases}$$

当 $\varepsilon=0$ 时,未扰动方程

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\\dot{y}=-x+x^{3}\end{cases}$$

有三个奇点:两个鞍点$(\pm1,0)$和一个中心$(0,0)$。未扰动系统有两条异宿轨,并且这两条异宿轨构成一个异宿圈(如图 7.16)。

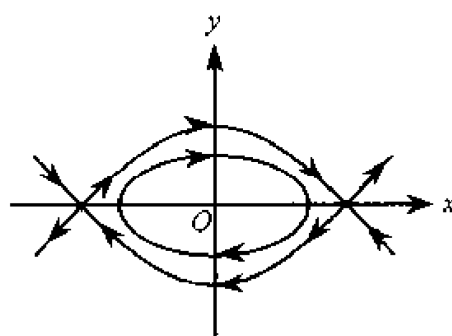


图 7.16 异宿圈

不难通过积分得到连接两个鞍点的两条异宿轨为

$$\begin{cases} x_{\pm}^{0}(t) = \pm \operatorname{th}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right) \\ y_{\pm}^{0}(t) = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sech}^{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right) \end{cases}$$

它们对应的 Melnikov 函数为

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}_{\pm}^{0}(t))\Lambda \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_{\pm}^{0}(t), t + t_0)\mathrm{d}t$$

这里

$$\boldsymbol{q}_{\pm}^{0}(t) = \begin{pmatrix} x_{\pm}^{0}(t) \\ y_{\pm}^{0}(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}_{\pm}^{0}(t)) = \begin{pmatrix} y_{\pm}^{0}(t) \\ -x_{\pm}^{0}(t) + [x_{\pm}^{0}(t)]^{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_{\pm}^{0}(t), t + t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta y_{\pm}^{0}(t) + f\cos\omega(t + t_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}_{\pm}^{0}(t))\Lambda \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_{\pm}^{0}(t), t + t_0) \\ & = \begin{pmatrix} y_{\pm}^{0}(t) \\ -x_{\pm}^{0}(t) + [x_{\pm}^{0}(t)]^{3} \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta y_{\pm}^{0}(t) + f\cos\omega(t + t_0) \end{pmatrix} \\ & = [-\delta y_{\pm}^{0}(t) + f\cos\omega(t + t_0)]y_{\pm}^{0}(t) \end{aligned}$$

因此,有

$$\begin{aligned} M_{\pm}(t_0) & = \int_{-\infty}^{+\infty} [-\delta y_{\pm}^{0}(t) + f\cos\omega(t + t_0)]y_{\pm}^{0}(t)\mathrm{d}t \\ & = \delta I_1 \pm f I_2 \cos\omega t_0 \end{aligned}$$

这里

$$I_1=\frac{2\pi}{3}\qquad I_2=\sqrt{2}\pi\omega\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right)$$

由 $M_{\pm}(t_0)=0$ 得

$$\cos\omega t_0=\pm\frac{\delta I_1}{fI_2}$$

要使这个方程有解，必须

$$\frac{\delta I_1}{fI_2}<1$$

即

$$\frac{f}{\delta}>\frac{I_2}{I_1}$$

在上面条件下，记方程 $\cos\omega t_0=\pm\frac{\delta I_1}{fI_2}$ 的解为 $t_0^{\pm}$，即有 $M_{\pm}(t_0^{\pm})=0$，又因为

$$M'_{\pm}(t_0^{\pm})=\mp\omega fI_2\sin\omega t_0^{\pm}\neq 0$$

所以 $t_0^{\pm}$ 是简单零点，故当

$$\frac{f}{\delta}>\frac{I_2}{I_1}=\frac{2}{3\pi\omega}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right)$$

时，系统具有 Smale 马蹄意义下的混沌。

例 7.9　超导 Josephson 结模型。设 $I_s=I_c\sin\varphi$ 是流过 Josephson 结的电流，则超导 Josephson 结模型可用下面方程描述：

$$\ddot{\varphi}+\sin\varphi+\varepsilon[\delta(1+E\cos\varphi)\dot{\varphi}-(\delta b+a\sin\omega t)]=0$$

令 $\varphi=x,\dot{\varphi}=y$，则上面的方程等价于下面的平面系统：

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\sin x+\varepsilon[\delta b+a\sin\omega t-\delta(1+E\cos x)y]\end{cases}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，未扰动系统是 Hamilton 系统。在区间 $[-\pi,\pi]$ 内，未扰动系统有三个奇：$(0,0)$ 是中心，$(-\pi,0)$ 和 $(\pi,0)$ 是两个鞍点，且有连接这两个鞍点的两条异宿轨道

$$\begin{cases}x_{\pm}^0(t)=\pm 2\arcsin(\mathrm{th}t)\\ y_{\pm}^0(t)=\pm 2\mathrm{sech}t\end{cases}$$

不难求得对应于这两条异宿轨道的 Melnikov 函数为

$$M_{\pm}(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}y_{\pm}^0(t)[\delta b+a\sin\omega(t+t_0)-\delta(1+E\cos x^0\pm(t))y_{\pm}^0(t)]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2a\pi}{\mathrm{ch}(\pi\omega/2)}\left(\frac{\delta}{\delta_{\pm}^0(b)}+\sin\omega t_0\right)$$

其中 $\delta_{\pm}^{0}(b)=\frac{c_0}{b\mp b_0}$, $b_0=\frac{12+4E}{320}$, $c_0=a\left(\mathrm{ch}\frac{\pi\omega}{2}\right)^{-1}$。显然,当 ε 充分小时,在区间 $0\leqslant\delta\leqslant|\delta_{\pm}^{0}(b)|$ 上,该系统具有 Smale 马蹄意义下的混沌。

7.6 二自由度 Hamilton 系统的 Melnikov 方法

Melnikov 方法对于高维系统的推广也有一定的发展,例如二自由度 Hamilton 系统的 Melnikov 方法。

二自由度 Hamilton 系统的运动方程可写为

$$\begin{cases}\dot{q}_1=\dfrac{\partial H}{\partial p_1} & \dot{q}_2=\dfrac{\partial H}{\partial p_2}\\[2mm] \dot{p}_1=-\dfrac{\partial H}{\partial q_1} & \dot{p}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial q_2}\end{cases}\tag{7.43}$$

这里 q_1 和 q_2 是广义坐标,p_1 和 p_2 是广义动量,而

$$H=H(q_1,q_2,p_1,p_2)$$

是系统的 Hamilton 函数。显然系统(7.43)有一个首次积分

$$H(q_1,q_2,p_1,p_2)=h=\text{常数}$$

因此,对于给定的 h, Hamilton 系统(7.43)的轨线被限制在三维等势面 $H=h$ 上运动。这将使我们能在三维流形上建立二维截面和定义二维截面上的 Poincare 映射。

下面假设 q_2 和 p_2 可以表为作用-角量的函数,即

$$q_2=q_2(\theta,I)\qquad p_2=p_2(\theta,I)\tag{7.44}$$

其中 q_2,p_2 关于 θ 是 2π-周期函数,并且进一步假设上面的变换在某区域内是可逆的,即可从上面两式解出

$$\theta=\theta(q_2,p_2)\qquad I=I(q_2,p_2)$$

在式(7.44)变换下,系统的 Hamilton 函数变为

$$H(q_1,q_2(\theta,I),p_1,p_2(\theta,I))=\overline{H}(q_1,p_1,\theta,I)=h\tag{7.45}$$

由于我们要求变换(7.44)是正则变换,那么在新坐标系下,Hamilton 方程(7.43)变为

$$\begin{cases}\dot{q}_1=\dfrac{\partial\overline{H}}{\partial p_1} & \dot{p}_1=-\dfrac{\partial\overline{H}}{\partial q_1}\\[2mm] \dot{\theta}=\dfrac{\partial\overline{H}}{\partial I} & \dot{I}=-\dfrac{\partial\overline{H}}{\partial\theta}\end{cases}\tag{7.46}$$

现在假设从式(7.45)中可解出

$$I = L(q_1, p_1, \theta, h) \tag{7.47}$$

下面利用上式将系统(7.43)化为二维非自治系统。

对式(7.45)两边分别对 q_1 和 p_1 求偏导得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial q_1} + \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial I} \cdot \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial p_1} + \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial I} \cdot \dfrac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \end{cases}$$

由此有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial q_1} \Big/ \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial I} = -\dfrac{\partial L}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial p_1} \Big/ \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial I} = -\dfrac{\partial L}{\partial p_1} \end{cases} \tag{7.48}$$

下面以角量 θ 代替时间 t 的地位,即以 θ 为自变量,那么由式(7.46)有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\dot{q}_1}{\dot{\theta}} = \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial p_1} \Big/ \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial I} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\dot{p}_1}{\dot{\theta}} = -\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial q_1} \Big/ \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial I} \end{cases}$$

于是由式(7.48),上面的方程组可写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{\partial L}{\partial p_1}(q_1, p_1, \theta, h) \\ \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\partial L}{\partial q_1}(q_1, p_1, \theta, h) \end{cases} \quad (q_1, p, \theta) \in D \times S^1 \tag{7.49}$$

这里 h 是积分常数,$D \subset \mathbf{R}^2$ 是开集,上式是以角量 θ 为自变量的二维非自治系统。因此,将 Hamilton 系统(7.43)约化为等势面的系统(7.49)。

定义横截面

$$\Sigma = \{(q_1, p_1, \theta) \in D \times S^1 \mid \theta = \theta_0 \in [0, 2\pi], h = h_0\}$$

和相应的 Poincare 映射 $P: \Sigma \to \Sigma$。

为了推广 Melnikov 方法,我们必须要对 Hamilton 方程(7.49)作一个适当的处理。为此,我们要求 Hamilton 方程(7.49)是近可积的,且两个自由度是解耦的,即把系统(7.46)的 Hamilton 函数 $\overline{H}$ 表示为

$$\overline{H}(q_1, p_1, \theta, I) = F(q_1, p_1) + G(I) + \varepsilon H_1(q_1, p_1, \theta, I) \tag{7.50}$$

并且假设 $\Omega(I) = \dfrac{\partial G}{\partial I} \neq 0$,且对于 $I > 0$ 有 $\Omega > 0$,那么,对于充分小的 ε,$\overline{H} = h$ 关于作用量 I 是可解的,即可从方程

$$F(q_1, p_1) + G(I) + \varepsilon H_1(q_1, p_1, \theta, I) = h$$

或

$$G(I)=h-F(q_1,p_1)-\varepsilon H_1(q_1,p_1,\theta,I)$$

可解出

$$I=L(q_1,p_1,\theta,h)=G^{-1}(h-F(q_1,p_1)-\varepsilon H_1(q_1,p_1,\theta,I))$$

将上式在 $h-F(q_1,p_1)$处作泰勒展开得

$$\begin{aligned}I&=G^{-1}(h-F(q_1,p_1))-\varepsilon\frac{\partial G^{-1}}{\partial I}(h-F_1(q_1,p_1))H_1(q_1,p_1,\theta,I)+O(\varepsilon^2)\\&=L^0(q_1,p_1,h)-\varepsilon\frac{\partial G^{-1}}{\partial I}(h-F_1(q_1,p_1))H_1(q_1,p_1,\theta,I)+O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

这里 $L^0(q_1,p_1,h)=G^{-1}(h-F(q_1,p_1))$。一个直接计算有

$$\begin{aligned}\frac{\partial G^{-1}}{\partial I}(h-F_1(q_1,p_1))&=\frac{1}{\frac{\partial G}{\partial I}(G^{-1}(h-F_1(q_1,p_1)))}\\&=\frac{1}{\Omega(L^0(q_1,p_1,h))}\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&H_1(q_1,p_1,\theta,I)\\&=H_1\left(q_1,p_1,\theta,L^0(q_1,p_1,h)-\varepsilon\frac{\partial G^{-1}}{\partial I}(h-F_1(q_1,p_1))H_1(q_1,p_1,\theta,I)+O(\varepsilon^2)\right)\\&=H_1(q_1,p_1,\theta,L^0(q_1,p_1,h))+O(\varepsilon)\end{aligned}$$

因此,有

$$\begin{aligned}I&=L^0(q_1,q_2,h)+\varepsilon\frac{H_1(q_1,p_1,\theta,L^0(q_1,p_1,h))}{\Omega(L^0(q_1,p_1,h))}+O(\varepsilon^2)\\&=L^0(q_1,q_2,h)+\varepsilon L'(q_1,p_1,\theta,h)+O(\varepsilon^2)\\&=L(p_1,q_1,\theta,h)\end{aligned}\tag{7.51}$$

这里

$$L'(q_1,p_1,\theta,h)=\frac{H_1(q_1,p_1,\theta,L^0,(q_1,p_1,h))}{\Omega(L^0(q_1,p_1,h))}$$

以式(7.51)代入方程组(7.49)得

$$\begin{cases}\dfrac{dq_1}{d\theta}=-\dfrac{\partial L^0}{\partial p_1}(q_1,p_1,h)-\varepsilon\dfrac{\partial L'}{\partial p_1}(q_1,p_1,\theta,h)+O(\varepsilon^2)\\\dfrac{dp_1}{d\theta}=\dfrac{\partial L^0}{\partial q_1}(q_1,p_1,h)+\varepsilon\dfrac{\partial L'}{\partial q_1}(q_1,p_1,\theta,h)+O(\varepsilon^2)\end{cases}\tag{7.52}$$

从方程组(7.52)的形式来看,当 $\varepsilon=0$ 时,有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{\partial L^0}{\partial p_1}(q_1,p_1,h)\\ \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{\partial L^0}{\partial p_1}(q_1,p_1,h)\end{cases}\tag{7.53}$$

这是一个自治二维 Hamilton 系统，假设 Hamilton 方程(7.53)有一条同宿轨$(q_1^0(\theta),p_1^0(\theta))$，则 $h^0=F(q_1^0(\theta),p_1^0(\theta))$(因为 $L^0(q_1,p_1,h)=G^{-1}(h-F(q_1,p_1))=\bar{h}$ 是 Hamilton 方程(7.53)的首次积分)。那么当 $h>h_0$ 时，系统(7.52)的 Melnikov 函数为

$$M(\theta_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\{L^0(q_1^0(\theta),p_1^0(\theta),h),L'(q_1^0(\theta),p_1^0(\theta),\theta+\theta^0,h)\}\mathrm{d}\theta$$

这里$\{L^0,L'\}=\dfrac{\partial L^0}{\partial q_1}\dfrac{\partial L'}{\partial p_1}-\dfrac{\partial L^0}{\partial p_1}\dfrac{\partial L'}{\partial q_1}$是 Poisson 括号。利用式(7.50)，有

$$\{L^0,L'\}=\frac{1}{\Omega^2(G^{-1}(h-h_0))}\{F,H_1\}$$

于是有

$$M(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\{F(q_1^0(t),p_1^0(t)),H_1(q_1^0(t),p_1^0(t),\Omega(G^{-1}(h-h_0))t+t_0,h)\}\mathrm{d}t$$

因此，对于充分小的 $\varepsilon>0$，在等势面 $H=h>h^0$ 上，如果存在 $M(t_0)$的不依赖于 ε 的简单零点的话，那么 Hamilton 系统(7.52)的 Poincare 映射存取横截同宿点，因此也就具有 Smale 马蹄变换意义下的混沌，于是系统(7.43)具有 Smale 马蹄变换意义下的混沌。

下面我们来给出上面理论的应用。

例 7.10 考虑下面二自由度系统

$$\begin{cases}\ddot{u}_1+\omega_1^2u_1=\alpha_1u_1^2+\varepsilon(2\alpha_1u_1u_2+\alpha_3u_2^2)\\ \ddot{u}_2+\omega_2^2u_2=\varepsilon(\alpha_2u_1^2+2\alpha_3u_1u_2+\alpha_4u_2^2)\end{cases}\tag{7.54}$$

这个系统等价于下列四维系统

$$\begin{cases}\dot{u}_1=v_1\\ \dot{u}_2=v_2\\ \dot{v}_1=-\omega_2^2u_1+\alpha_1u_1^2+\varepsilon(2\alpha_1u_1u_2+\alpha_3u_2^2)\\ \dot{v}_2=-\omega_2^2u_2+\varepsilon(\alpha_2u_1^2+2\alpha_3u_1u_2+\alpha_4u_2^2)\end{cases}\tag{7.55}$$

下面我们要证明上方程是 Hamilton 系统，由

$$\begin{cases}\dot{u}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial \nu_1} = v_1 \\ \dot{u}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial \nu_2} = v_2 \\ \dot{v}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial u_1} = -\omega_1^2 u_1 + \alpha_1 u_1^2 + \varepsilon(2\alpha_1 u_1 u_2 + \alpha_3 u_2^2) \\ \dot{v}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial u_2} = -\omega_2^2 u_2 + \varepsilon(\alpha_2 u_1^2 + 2\alpha_3 u_1 u_2 + \alpha_4 u_2^2)\end{cases}$$

可解得

$$H = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2 + \omega_1^2 u_1^2 + \omega_2^2 u_2^2) - \frac{\alpha_1}{3}u_1^3 - \varepsilon\left(\alpha_2 u_1^2 u_2 + \alpha_3 u_2^2 u_1 + \frac{\alpha_4}{3}u_2^3\right)$$

由此可知系统(7.55)的确是 Hamilton 系统。

作正则变换

$$u_2 = \sqrt{\frac{2I}{\omega_2}}\sin\theta \qquad v_2 = \omega_2\sqrt{\frac{2I}{\omega_2}}\cos\theta$$

那么 Hamilton 函数变为

$$\begin{aligned}\overline{H} &= \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 u_1^2 - \frac{\alpha_1}{3}u_1^3 + \omega_2 I - \\ &\quad \varepsilon\left(\alpha_2\sqrt{\frac{2I}{\omega_2}}u_1^2\sin\theta + \alpha_2\frac{2I}{\omega_2}u_1\sin^2\theta + \frac{\alpha_4}{3}\left(\frac{2I}{\omega^2}\right)^{3/2}\sin^3\theta\right) \\ &= F(u_1, v_1) + GI + \varepsilon H_1(u_1, v_1, I, \theta)\end{aligned}$$

这里

$$F(u_1, v_1) = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 u_1^2 - \frac{\alpha_1}{3}u_1^3$$

$$G(I) = \omega_2 I$$

$$H_1 = -\left(\alpha_2\sqrt{\frac{2I}{\omega_2}}u_1^2\sin\theta + \alpha_2\frac{2I}{\omega_2}u_1\sin^2\theta + \frac{\alpha_4}{3}\left(\frac{2I}{\omega_2}\right)^{3/2}\sin^3\theta\right)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时,系统(7.55)的可积部分在新坐标系下对应的 Hamilton 函数为

$$H_0 = (u_1, v_1, I, \theta) = F(u_1, v_1) + G(I)$$

H_0 对应的 Hamilton 方程为

$$\begin{cases}\dot{u}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = -\omega_1^2 u_1 + \alpha_1 u_1^2 \\ \dot{\theta} = \omega_2 \\ \dot{I} = 0\end{cases}$$

这个系统是解耦的,关于 u_1, v_1 的方程

$$
\begin{cases}
\dot{u}_1 = v_1 \\
\dot{v}_1 = -\omega_1^2 u_1 + \alpha_1 u_1^2
\end{cases}
$$

有两个奇点$(0,0)$和$\left(\dfrac{\omega_1^2}{\alpha_1},0\right)$。通过计算它们的导算子可知$(0,0)$是中心，$\left(\dfrac{\omega_1^2}{\alpha_1},0\right)$是鞍点，并且有一条入鞍点的同宿轨

$$
\begin{cases}
u_{10} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\omega_1^2}{\alpha_1}\mathrm{th}^2\left(\dfrac{\omega_1}{\alpha_1}t\right) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_1^2}{\alpha_1} \\
v_{10} = 3\,\dfrac{\omega_1^3}{\alpha_1^2}\mathrm{sech}^2\left(\dfrac{\omega_1}{\alpha_1}t\right)\mathrm{th}\left(\dfrac{\omega_1}{\alpha_1}t\right)
\end{cases}
$$

它对应的 Hamilton 量为

$$
\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 u_1^2 - \frac{\alpha_1}{3}u_1^3 = \frac{\omega_1^6}{6\alpha_1^2} = h_0
$$

因此当 $H = h > h_0$ 时，计算 Melnikov 函数

$$
\begin{aligned}
M(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\{F, H_1\}(t - t_0)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\alpha_2}{\omega_2}\sqrt{2(h - h_0)}\int_{-\infty}^{+\infty} u_{10}(t - t_0)v_{10}(t - t_0)\sin\omega_2 t\mathrm{d}t + \\
&\quad \frac{2\alpha_3}{\omega_2}(h - h_0)\int_{-\infty}^{+\infty} v_{10}(t - t_0)\sin^2\omega_2 t\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\pi\omega_2\alpha_2}{\alpha_1^2}\sqrt{2(h - h_0)}\left(\frac{3}{2}\omega_1^2 - 6\right)\mathrm{csch}\left(\frac{\pi\omega_2}{\omega_1}\right)\cos\omega_2 t_0 + \\
&\quad \frac{48\pi\alpha_3}{\alpha_1}(h - h_0)\mathrm{csch}\left(\frac{2\pi\omega_2}{\omega_1}\right)\sin 2\omega_2 t_0
\end{aligned}
$$

通过计算 $M_1(t_0) = 0$ 的简单零点，可以得到系统(7.55)存在 Smale 意义下混沌的条件。

例 7.11 考虑如下具有非线立方项的系统

$$
\begin{cases}
\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = \alpha_1 u_1^3 + \varepsilon(3\alpha_2 u_1^2 u_2 + \alpha_3 u_1 u_2^2 + \alpha_4 u_2^3) \\
\ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = \varepsilon(\alpha_2 u_1^3 + \alpha_3 u_1^2 u_2 + 3\alpha_4 u_1 u_2^2 + \alpha_5 u_2^3)
\end{cases}
$$

上面系统等价于下列四维系统

$$
\begin{cases}
\dot{u}_1 = v_1 \\
\dot{u}_2 = v_2 \\
\dot{v}_1 = -\omega_1^2 u_1 + \alpha_1 u_1^3 + \varepsilon(3\alpha_2 u_1^2 u_2 + \alpha_2 u_1 u_2^2 + \alpha_4 u_2^3) \\
\dot{v}_2 = -\omega_2^2 u_2 + \varepsilon(\alpha_2^2 u_1^3 + \alpha_3 u_1^2 u_2 + 3\alpha_4 u_1 u_2^2 + \alpha_5 u_2^3)
\end{cases}
$$

容易证明上面的系统是四维 Hamilton 系统，且其 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2+\omega_1^2u_1^2+\omega_2^2u_2^2)-\frac{\alpha_1}{4}u_1^4-$$

$$\varepsilon\left(\alpha_2u_1^2u_2+\frac{\alpha_3}{2}u_1^2u_2^2+\alpha_4u_2^3u_1+\frac{\alpha_5}{4}u_2^4\right)$$

同例 7.1 一样，通过正则变换

$$u_2=\sqrt{\frac{2I}{\omega_2}}\sin\theta \qquad v_2=\omega^2\sqrt{\frac{2I}{\omega_2}}\cos\theta$$

把 Hamilton 函数化为

$$\overline{H}=(u_1,v_1,I,\theta)=F(u_1,v_1)+G(I)+\varepsilon H_1(u_1,v_1,I,\theta)$$

这里

$$F(u_1,v_1)=\frac{1}{2}v_1^2+\frac{1}{2}\omega_1^2u_1^2-\frac{\alpha_1}{4}u_1^4$$

$$G(I)=\omega_2 I$$

$$H_1(u_1,v_1,I,\theta)$$

$$=-\left(\alpha_2\sqrt{\frac{2I}{\omega_2}}u_1^2\sin\theta-\frac{\alpha_3 I}{\omega_2}u_1^2\sin^2\theta+\alpha_4\left(\frac{2I}{\omega_2}\right)^{3/2}u_1\sin^3\theta+\frac{\alpha_5 I^2}{\omega_2^2}\sin^4\theta\right)$$

当 $\varepsilon=0$，即无扰动时 Hamilton 函数为

$$H_0=F(u_1,v_1)+G(I)$$

它对应的 Hamilton 方程关于 u_1 和 v_1 的方程有三个奇点：(0,0)是中心，$\left(\frac{\omega_1}{\sqrt{\alpha}},0\right)$和$\left(-\frac{\omega}{\sqrt{\alpha_1}},0\right)$是两个鞍点，且存在两条连接这两个鞍点的异宿轨。对应于异宿轨的 Hamilton 函数的等势面为 $H_0=\frac{\omega_1^4}{4\alpha_1}=h_0$，异宿轨方程为

$$\begin{cases} u_{10}=\pm\dfrac{\omega_1}{\sqrt{\alpha_1}}\operatorname{th}\left(\dfrac{\omega_1}{\sqrt{2}}t\right) \\ v_{10}=\pm\dfrac{\omega_1^2}{\sqrt{2\alpha_1}}\operatorname{sech}\left(\dfrac{\omega_1}{\sqrt{2}}t\right) \end{cases}$$

这两条异宿轨构成一个异宿圈。当 $H=h_0>0$ 时，Melnikov 函数为

$$M_\pm(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\{F,H_1\}(t-t_0)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\alpha_2}{\omega}\sqrt{2(h-h_0)}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{10}^2(t-t_0)v_{10}(t-t_0)\sin\omega_2 t\mathrm{d}t+$$

$$\frac{2\alpha_3}{\omega_2^2}(h-h_0)\int_{-\infty}^{+\infty}u_{10}(t-t_0)v_{10}(t-t_0)\sin^2\omega_2 t\mathrm{d}t+$$

$$\frac{\alpha_4}{\omega_2^2}[2(h-h_0)]^{3/2}\int_{-\infty}^{+\infty}v_{10}(t-t_0)\sin^3\omega_2 t\mathrm{d}t$$

$$=\mp\frac{4\pi\omega_2^2\alpha_2}{\alpha_1\sqrt{\alpha_1}}\sqrt{h-h_0}\operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}\pi\omega_2}{2\omega_1}\right)\sin\omega_2 t_0+$$

$$\frac{4\pi\alpha_3}{\alpha_1}(h-h_0)\operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}\pi\omega_2}{\omega_1}\right)\sin2\omega_0 t_0\pm$$

$$\frac{3\pi\alpha_4}{\omega_2^2\sqrt{\alpha_1}}(h-h_0)^{3/2}\operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}\pi\omega_2}{2\omega_1}\right)\sin\omega_2 t_0\mp$$

$$\frac{3\pi\alpha_4}{\omega_2^2\sqrt{\alpha_1}}(h-h_0)^{3/2}\operatorname{csch}\left(\frac{3\sqrt{2}\pi\omega_2}{2\omega_1}\right)\sin3\omega_2 t_0$$

由此可确定存在 Smale 马蹄意义下混沌的条件。

思考题

1. 考虑纳维－斯托克斯方程的一种截断可得如下五维截谱模型

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1+4x_2x_3+4x_4x_5\\\dot{x}_2=-9x_2+3x_1x_3\\\dot{x}_3=-5x_3-7x_1x_2+Re\\\dot{x}_4=-5x_4-x_1x_5\\\dot{x}_5=-x_5-3x_1x_4\end{cases}$$

这里 $x_i(i=1,2,3,4,5)$是谱展开系数，Re 是雷诺数。试通过数值计算证明当雷诺数 Re 的数值超过 29 时，系统会出现混沌状态。

2. 通过数值计算证明，化学反应动力学中的化学反应模型

$$\begin{cases}\dot{x}=x(a_1-k_1x-z-y)+k_2y^2+a_3\\\dot{y}=y(x-k_2y-a_6)+a_2\\\dot{z}=z(a_4-x-k_5z)+a_3\end{cases}$$

在 $k_1=0.25,k_2=10^{-8},k_3=0.5,a_1=30,a_2=a_3=10^{-2},a_4=16.5,a_6=10$ 时出现混沌。

3. 通过数值计算证明，化学反应中的 Brosselor 模型

$$\begin{cases}\dot{x}=A+x^2y-Bx-x+a\cos\omega t\\\dot{y}=Bx-x^2y\end{cases}$$

当 $A=0.4, B=1.2, a=0.12, \omega=0.9$ 时出现混沌。

4. 在 Rössler 系统中固定 $b=2$、$c=4$，而参数 a 作为可变动参数，试画出 a 取下列数值时 Rössler 系统的吸引子：

(1) $a=0.3$(极限环)；

(2) $a=0.35$(周期 2)；

(3) $a=0.375$(周期 4)；

(4) $a=0.386$(四带混沌吸引子)；

(5) $a=0.3909$(周期 6)；

(6) $a=0.398$(单带混沌)；

(7) $a=0.4$(周期 5)；

(8) $a=0.411$(周期 3)。

5. 用数值方法计算 Lorenz 系统的最大 Lipuvnov 指数。

6. 用 Melnikov 方法找出扰动单摆系统

$$\ddot{\theta}+\sin\theta+\varepsilon(\beta\dot{\theta}+\gamma\cos\omega t)=0$$

具有 Smale 马蹄意义混沌的一个充分条件。

7. 证明依赖于时间的 Hamilton 函数

$$H(x,y,t)=\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{y^3}{3}+\frac{\varepsilon y^2\cos t}{2}$$

对应的 Hamilton 系统对于充分小的 ε，在一定的条件下存在 Smale 马蹄意义下的混沌。

8. 催化反应 Flickering 振动模型，该模型可以用下列平面系统描述：

$$\begin{cases}\dot{x}=y+xy+\varepsilon(lx+my\cos\omega t)\\ \dot{y}=-x+\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\end{cases}$$

试用 Melnikov 方法确定该系统存在 Smale 马蹄意义下混沌的充分条件。

9. 两种群捕食者和被捕者的生态模型可以用下列平面系统描述：

$$\begin{cases}\dot{x}=x(f-ax-2by)+\varepsilon[\lambda_1x+(\lambda_3+\lambda_2x)\cos\omega t]\\ \dot{y}=y(-f+2ax+by)+\varepsilon[-\lambda_1y+(\lambda_3-\lambda_2y)\cos\omega t]\end{cases}$$

这里 $x(t)$是被捕者，$y(t)$是捕食者。证明，当 ε 充分小时，在一定的条件下系统的发展是不可预测的。

10. 从一个实际工程问题出发，首先建立其动力学模型，然后用本章的方法研究(直接考察或通过扰动)该系统的混沌行为。

第八章　孤立子

由第五章知道孤立子是色散和非线性相互作用的结果，也知道波幅较大的波比波幅较小的波行进得快，且通过求解非线性偏微分方程的行波解并利用同宿轨或异宿轨获得单峰孤立子。事实上，许多时候孤立子是多峰的，我们将用反散射方法求出具有多峰的孤立子。对于多峰孤立子，波幅较大的波比波幅较小的波行进得快，那么在行进一定时间后，波幅较大的波会赶上波幅较小的波，就会发生两波"相撞"的现象。十分有趣的是，两波并不因相互碰撞而受到影响，而是碰撞后仍以原来的形状和速度行进。但碰撞后，速度快的波跑在速度小的波的前面。这就是说孤立子具有高度的稳定性。这种稳定性可以用各种守恒量加以解释。KdV 方程稳定孤立子的存在正好从理论上解释了罗素于 1834 年在爱丁堡道格拉斯哥的运河中发现的孤波现象(见 5.6 节)。非线性薛定谔方程稳定孤立子的存在为孤波通讯提供了理论基础。

下面就求解孤立子的反散射方法以及孤立子的一些基本性质作一个简单介绍。

8.1　反散射方法

(1) 量子力学中的正散射方法。

众所周知，量子力学中著名的一维薛定谔方程为

$$\Psi_{xx}-(u-\lambda)\Psi=0 \tag{8.1}$$

其中 Ψ 为波函数，$u(x,t)$为位势函数，λ 对应子能谱(即特征值)。所谓正散射方法就是在已知位势函 u 的情况下求解需要了解的称为散射数据的物理量以及波函数 Ψ。

我们已经知道，当 $x\to\pm\infty$，位势 $u\to 0$ 时，当 $\lambda<0$ 时薛定谔方程有有限多个离散谱 $\lambda_n=-k_n^2(n=1,2,\cdots,N)$；而当 $\lambda>0$ 时为连续谱 $\lambda=k^2(-\infty<k<+\infty$，$k$ 为实数)。对于固定的 t，定义薛定谔方程(8.1)的正散射问题的解满足边界条件

$$\Psi(x,k,t)\sim e^{-ikx}+b(k,t)e^{ikx}\qquad x\to+\infty$$

$$\Psi(x,k,t)\sim a(k,t)e^{-ikx}\qquad x\to-\infty$$

并且它的有界态的解满足边界条件

$$\Psi_m(x,k_m(t),t)\sim c_m(k_m(t),t)\mathrm{e}^{-k_m x}\qquad x\to+\infty$$

$$\Psi_m(x,k_m(t),t)\sim \mathrm{e}^{k_m x}\qquad x\to-\infty$$

其中 $b(k,t)$称为反射系数,$a(k,t)$称为透射系数,而 c_m 称为衰减因子,且特征函数 Ψ_m 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_m^2\mathrm{d}x=1\quad(\text{归一化条件})$$

而反射系数和透射系数满足条件

$$|a|^2+|b|^2=1$$

因此,我们可以详细地描述薛定谔方程的正散射问题如下:给定位势函数 u,寻求散射数据 $k_m,c_m,a(k),b(k)$,并决定波函数 Ψ。

(2) KdV 方程与反散射方法

KdV 方程

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0\tag{8.2}$$

与一维薛定谔方程有密切的联系。设 u 是薛定谔方程的解,则如下 Riccati 方程

$$v_x+v^2+\lambda=u\tag{8.3}$$

把未知函数 $v(x,t)$与 u 联系在一起。以 $v=\dfrac{\Psi_x}{\Psi}$代入式(8.3)得

$$\Psi_{xx}-(u-\lambda)\Psi=0\tag{8.4}$$

这正是一维薛定谔方程。另一方面,由式(8.4)有

$$u=\frac{\Psi_{xx}}{\Psi}+\lambda$$

将上式代入 KdV 方程(8.2)容易得出

$$\lambda_t\Psi^2+(\Psi R_x-\Psi_x R)_x=0\tag{8.5}$$

这里

$$R=\Psi_t+\Psi_{xxx}-3(u+\lambda)\Psi_x=\Psi_t+\Psi_{xxx}-3\left(\frac{\Psi_{xx}}{\Psi}+2\lambda\right)\Psi_x\tag{8.6}$$

事实上,解方程(8.5)并不比直接去解 KdV 方程容易。因此就有所谓反散射方法。反散射方法的主要思想是:首先由 KdV 方程的初始条件从方程(8.5)决定薛定谔方程的散射数据 k_m、c_m、$a(k)$和 $b(k)$,然后决定位势函数 $u(x,t)$。

下面的问题是怎样用初始条件决定散射数据?我们知道 KdV 方程的孤立子解 $u(x,t)$当 $x\to\pm\infty$时,有 $u(x,t)\to0$,也就是说当 $x\to\pm\infty$时,薛定谔方程的位势趋于零。由此及前面内容可知,当 $x\to\pm\infty$时,对应于离散谱 $\lambda_n(n=1,2,\cdots,N)$的特征函数 Ψ_n 和 Ψ_n 的导数以及 u 都趋于零,那么在方程(8.5)中以

λ_n 代替 λ 以及以 Ψ_n 代替 Ψ 后，并两边从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分得

$$\lambda_{nt}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_n^2\mathrm{d}t = 0 \qquad n = 1,2,\cdots,N \tag{8.7}$$

但 $\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_n^2\mathrm{d}t = 1$，因此由式(8.7)有

$$\lambda_{nt}=0 \qquad \lambda_n=\text{常数} \qquad n=1,2,\cdots,N$$

这就是说薛定谔方程的反散射问题只需从 KdV 方程的初始条件就可以决定其离散谱的一切散射数据。下面来决定这些散射数据。

我们知道，当谱 λ 与时间无关，即 $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=\lambda_t=0$ 时，方程(8.5)可写为

$$(\Psi R_x-\Psi_x R)_x=0$$

由此有

$$\Psi R_x-\Psi_x R=D(t) \tag{8.8}$$

显然上式可写为

$$(\Psi R)_x=\frac{2\Psi_x}{\Psi}(\Psi R)+D(t)$$

由此有

$$\Psi R = \mathrm{e}^{2\int^x\frac{\Psi_x}{\Psi}\mathrm{d}x}\left(D(t)\int^x\mathrm{e}^{-2\int^x\frac{\Psi_x}{\Psi}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C(t)\right) = \Psi^2\left(D(t)\int^x\frac{\mathrm{d}x}{\Psi^2}+C(t)\right)$$

因此

$$R = C(t)\Psi + D(t)\Psi\int^x\frac{\mathrm{d}x}{\Psi^2} \tag{8.9}$$

对于离散谱 λ_n 和它对应的特征函数 Ψ_n，由式(8.8)有

$$\Psi_n R_{nx}-\Psi_{nx}R_n=D(t) \tag{8.10}$$

由于当 $x\to\pm\infty$，Ψ_n 以及它的导数都趋于零，那么式(8.10)有 $D(t)=0$，从而由式(8.9)有

$$R_n=C(t)\Psi_n$$

由上式及式(8.6)有

$$\Psi_n\Psi_{nt}+\Psi_n\Psi_{nxxx}-3(\Psi_{nxx}+2\lambda_n\Psi_n)\Psi_{nx}=C(t)\Psi_n^2$$

将上式两边对 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分得

$$C(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_n^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\Psi_n^2)_t\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty}(\Psi_n\Psi_{nxx}-2\Psi_{nx}^2-3\lambda_n\Psi_n^2)_x\mathrm{d}x$$

由边值条件有

$$C(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_n^2\mathrm{d}x = 0$$

从而 $C(t)=0$。因此 $R_n=0$,即

$$\Psi_{nt}+\Psi_{nxxx}-3(u+\lambda_n)\Psi_{nx}=0$$

由于当 $x\to+\infty$ 时,$\Psi_n\approx c_n(t)\mathrm{e}^{-k_nx}$,以该式代入上式得

$$c'_n(t)\mathrm{e}^{-k_nx}-k_n^3c_n(t)\mathrm{e}^{-k_nx}+3\lambda_nk_nc_n(t)\mathrm{e}^{-k_nx}=0$$

注意到 $\lambda_n=-k_n^2$,那么由上式得

$$c'_n(t)=4k_n^3c_n(t)$$

由此有

$$c_n(t)=c_n(0)\mathrm{e}^{4k_n^3t}\qquad n=1,2,\cdots,N \tag{8.11}$$

其次,对于连续谱,可以认为 λ 与时间 t 无关,于是其对应的特征函数满足式(8.9),同样将当 $x\to\infty$ 时特征函数的渐近解 $\Psi(x,k,t)\approx a(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 代入式(8.9)得

$$a'+\mathrm{i}k^3a+3\mathrm{i}\lambda ka = C(t)a+\frac{D(t)}{a}\int^{x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

若 $D(t)=0$,令 $\lambda=k^2$,上式可化为

$$a'+(4\mathrm{i}k^3-C(t))a=0 \tag{8.12}$$

同样当 $x\to+\infty$ 时特征函数渐近解

$$\Psi(x,k,t)\approx\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+b(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

代入式(8.9)后,并取 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 项前的系数函数都为零可得

$$\begin{cases}\mathrm{i}k^3+3\mathrm{i}\lambda k=C(t)\\ b'-\mathrm{i}k(k^2+3\lambda)b=C(t)b\end{cases}$$

由此有 $C(t)=4\mathrm{i}k^3$(因 $\lambda=k^2$)。因此,由式(8.12)以及上面方程组中的第二个方程可得

$$\begin{cases}b(k,t)=b(k,0)\mathrm{e}^{8\mathrm{i}k^3t}\\ a(k,t)=a(k,0)\end{cases}$$

上面已经确定了所有的散射数据,那么剩下来的问题是怎么利用这些已确定的散射数据来确定位势函数 $u(x,t)$? 反散射问题的位势由下式决定:

$$u(x,t)=-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}K(x,x,t) \tag{8.13}$$

其中 K 满足如下积分方程(GLM 方程):

$$K(x,y,t)+B(x+y,t)+\int_x^{+\infty}B(y+z,t)\cdot K(x,z,t)\mathrm{d}z=0 \tag{8.14}$$

$$y > x,\ K(x,z,t) \to 0 \quad z \to +\infty$$

积分方程(8.14)的核为

$$B(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n^2(t)\mathrm{e}^{-k_n x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{8.15}$$

这样,通过求解薛定谔方程的反散射问题可以获得 KdV 方程的下列初值问题的解

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{8.16}$$

综上所述,求解过程如下:

① 求解谱问题

$$\Psi_{xx} - [u_0(x) - \lambda]\Psi = 0 \tag{8.17}$$

由此可以确定散射数据 k_n, $c_n(0)$和 $b(k,0)$,进而可以确定 $c_n(t)$和 $b(k,t)$。

② 计算积分核

$$\begin{aligned} B(x+y,t) &= \sum_{n=1}^{N} c_n^2(t)\mathrm{e}^{-k_n(x+y)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+y)}\mathrm{d}k \\ &= \sum_{n=1}^{N} c_n^2(0)\mathrm{e}^{8k_n^3 t - k_n(x+y)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(k,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[8k^3 + k(x+y)]}\mathrm{d}k \end{aligned} \tag{8.18}$$

③ 解积分方程

$$K(x,y,t) + B(x+y,t) + \int_{-\infty}^{+\infty} B(y+z,t)\cdot K(x,z,t)\mathrm{d}z = 0 \quad (y > x)$$

由此可解出 $K(x,y,z)$,进而可得位势函数

$$u(x,t) = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}K(x,x,t)$$

用一个框图表述上面过程如图 8.1 所示。

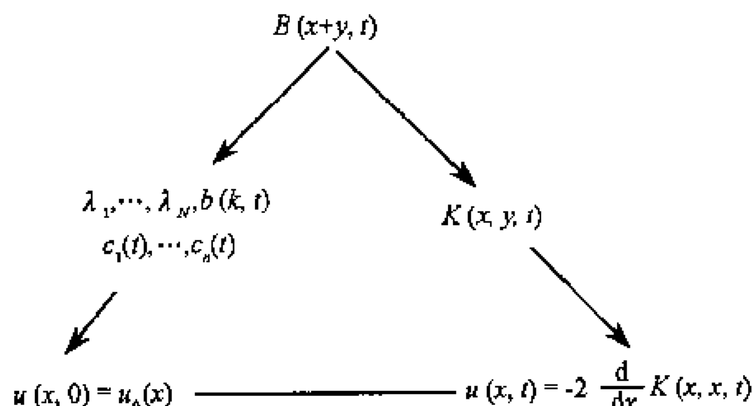


图 8.1 求解势函数框图

这样，就把解非线性 KdV 方程的初始值问题化为解二个线性方程，一个是解一个二阶线性常微分方程的 Sturm-Liouville 问题；另一个是求解线性积分方程。

下面举例说明反散射方法对求解 KdV 方程的孤立子的应用。在式(8.15)中，如果令 $b(k,t)=0$，那么有

$$B(x,t) = B(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n^2 e^{-k_n z}$$

对于 KdV 方程，我们有 $c_n = c_n(t) = c_n(0)e^{4k_n^3 t}$，且 $k_n>0$ 是互不相同的。以上式代入式(8.14)得

$$K(x,y,t) + \sum_{n=1}^{N} c_n^2 e^{-k_n(x+y)} + \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \int_x^{+\infty} e^{-k_n(y+z)} K(x,z,t)\mathrm{d}z = 0 \quad (8.19)$$

事实上，积分方程(8.19)有许多解。然而，只需求出它的一个解即可。下面来寻找式(8.19)的下列形式的解

$$K(x,y,t) = K(x,y) = -\sum_{m=1}^{N} c_m \phi_m(x) e^{-k_m y} \quad (8.20)$$

这里 $\phi_m(x)(m=1,2,\cdots,N)$是待定函数。以式(8.20)代入式(8.19)，并令 $e^{-k_m y}$ 前的系数函数为零得

$$\phi_m(x) + \sum_{n=1}^{N} c_m c_n \frac{e^{-(k_m+k_n)}}{k_m+k_n}\phi_n(x) = c_m e^{-k_m x} \qquad m = 1,2,\cdots,N$$

这是一个以 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N$ 为未知量的线性方程组，我们可以用代数方法来解它。上面的方程组可写为矩阵形式

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{e} \quad (8.21)$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 是 N 阶单位矩阵，而

$$\boldsymbol{C} = \left(\frac{c_m c_n e^{(k_m+k_n)x}}{k_m+k_n}\right)_{N\times N}$$

$$\boldsymbol{\phi} = (\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{e} = (c_1 e^{-k_1 x}, c_2 e^{-k_2 x},\cdots, c_N e^{-k_N x})^{\mathrm{T}}$$

线性方程组(8.21)有唯一解。因为 $\boldsymbol{C}$ 是对称矩阵，并且由于

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} x_m x_n c_m c_n \frac{e^{-(k_m+k_n)x}}{k_m+k_n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{m=1}^{N} x_m c_m e^{-k_m z}\right]^2 \mathrm{d}z > 0$$

可知 $\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵，因此 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵。这样可以通过解式(8.21)求出 $\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_x(x)$，因此我们进一步可求出 $K(x,y,t)$。通过直接计算可得无反射系数的位势为

$$u(x,t)=-2\frac{d^2}{dx^2}\ln[\det(I+C)]$$

这样就获得了 KdV 方程解。

例1　取 $u(x,0)=u_0(x)=-2\mathrm{sech}^2x$，在这种情况下，式(8.17)可写为

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+(2\mathrm{sech}^2x+\lambda)\Psi=0$$

可以用超几何函数求出上面方程的解，它具有一个离散特征值 $k_1=1$，因而可求出 $c_1(0)=\sqrt{2}$，$b(k,0)=0$，因此 $b(k,t)=0(\forall t\geqslant 0)$，这样我们有

$$B(x,t)=2e^{8t-x}$$

从而积分方程(8.14)可写为

$$K(x,y,t)+2e^{8t-x-y}+2e^{8t-y}\int_x^{+\infty}k(x,z,t)e^{-z}dz=0$$

令 $K(x,y,t)=L(x,t)e^{-y}$，那么上面的积分方程可写为

$$L(x,t)+2e^{8t-x}+2e^{8t}L(x,t)\int_x^{+\infty}e^{-2z}dz=0$$

由此有

$$L(x,t)=\frac{-2e^x}{1+e^{2x-8t}}\quad K(x,y,t)=\frac{-2e^{x-y}}{1+e^{2x-8t}}$$

于是可以求得 KdV 方程的解为

$$u(x,t)=-2\frac{d}{dx}K(x,x,t)=\frac{-8e^{2x-8t}}{(1+e^{2x-8t})^2}=-2\mathrm{sech}^2(x-4t)$$

例2　取位势满足条件 $u_0(x)=u(x,0)=-6\mathrm{sech}^2x$，那么在这种情况下，式(8.17)可写为

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+(\lambda+6\mathrm{sech}^2x)\Psi=0$$

解上面谱问题得

$$\lambda_1=-4\quad \Psi_1(x)=\frac{1}{4}\mathrm{sech}^2x$$

$$\lambda_2=-1\quad \Psi_2(x)=\frac{1}{2}\tanh x\cdot\mathrm{sech}x$$

由此可得 $c_1^2(0)=12$，$c_2^2(0)=6$，这都是无反射的，$b(k)=0$，于是直接计算有

$$B(x,t)=12e^{64t-2x}+6e^{8t-x}$$

$$K(x,y,t)=\frac{3e^{36t-2x-y}-3e^{-24t+2x-y}-6e^{28t-x-2y}-6e^{36t-x-2y}}{[3\cosh(x-28t)+\cosh(3x-36t)]^2}$$

由此可得位势函数为

$$u(x,t) = -12\frac{3+4\cosh(2x_1+24t)+\cosh(4x)}{[3\cosh(x_1-12t)+\cosh(3x_1-12t)]^2}$$

这里 $x_1 = x - 16t$。事实上,这是一个具有两个峰的孤立子。我们可以通过计算机画图来看其两个峰的相互作用。

反散射方法对求解非线性 KdV 方程的初值问题是十分有效的。下面将反散射方法加以推广,以便可解一些其他的非线性偏微分方程。

考虑一般的非线性方程

$$u_t = \boldsymbol{K}(u) \tag{8.22}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 是一个非线性偏微分算子。

在前面我们解 KdV 方程时,其反散射问题的谱问题取决于下面两个方程

$$\begin{cases} -\Psi_{xx} + u\Psi = \lambda\Psi \\ \Psi_t = -\Psi_{xxx} + 3(u+\lambda)\Psi_x \end{cases}$$

这里位势 u 是 KdV 方程的解。由上面方程组中的第一个方程式得 $\lambda\Psi_x = -\Psi_{xxx} + u_x\Psi + u\Psi_x$,以此代入上面方程组中的第二个方程,那么上面方程组变为

$$\begin{cases} -\Psi_{xx} + u\Psi = \lambda\Psi \\ \Psi_t = -4\Psi_{xxx} + 6u\Psi_x + 3u_x\Psi \end{cases} \tag{8.23}$$

如果引进两个线性算子

$$\boldsymbol{L}_0 = -\partial_x^2 + u \qquad \boldsymbol{M}_0 = -4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x$$

那么式(8.23)可写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}_0\Psi = \lambda\Psi \\ \Psi_t = \boldsymbol{M}_0\Psi \end{cases} \tag{8.24}$$

这里线性算子 $\boldsymbol{L}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_0$ 要满足所谓的相容性条件,即以 $\boldsymbol{L}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_0$ 代入下面的 Lax 方程

$$\boldsymbol{L}_{0t} + [\boldsymbol{L}_0, \boldsymbol{M}_0] = 0$$

可得出 KdV 方程。事实上的确如此,不过要注意微分算子的运算与一般微分的运算是不同的。

为了推广反散射方法,我们引进两个线性算子 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$,这里 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 与式(8.22)的解相联系并且满足下列方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}\boldsymbol{\Psi} = \lambda\boldsymbol{\Psi} \\ \boldsymbol{\Psi}_t = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Psi} \end{cases} \tag{8.25}$$

式(8.25)中的第一个方程就代表谱问题。如果我们假设谱 λ 与时间 t 无关,即 $\lambda_t = 0$,那么对式(8.25)的第一个方程两边对 t 求导有

$$L_t\Psi + L\Psi_t = \lambda\Psi_t$$

以式(8.25)代入上面的方程得

$$L_t\Psi + LM\Psi = \lambda M\Psi = M(\lambda\Psi) = ML\Psi$$

因此有

$$(L_t + LM - ML)\Psi = 0$$

从而得到 Lax 方程

$$L_t + LM - ML = 0$$

或写为

$$L_t + [L,M] = 0 \tag{8.26}$$

这里$[L,M] = LM - ML$ 是换位子。式(8.26)也称为相容性方程。

注意,在式(8.25)中的子线性算子 L 和 M 可以用更一般的线性算子矩阵来代替。

类似于解 KdV 方程的初值问题,对求解式(8.22)的初值问题,即给定初值条件 $u(x,0) = u_0(x)$,求满足式(8.22)的解 $u(x,t)$可通过如下三步获得:

① 利用初始条件 $u_0(x)$计算特征函数在 $x\to\pm\infty$时的散射数据(如算子 L 的谱,反射或透射系数等)。

② 求散射数据随时间的变化,由式(8.25)的第二个方程考虑当 $x\to\pm\infty$时 Ψ 的渐近行为,计算散射数据随时间的变化规律。

③ 求反问题的解。从已知的 L 的散射数据作为时间的函数,构造解 $u(x,t)$。

对于 KdV 方程,我们很容易确定了 L 和 M,但对一般的方程(8.22),并不能很容易确定算子 L 和 M。找出适合条件的非平凡的线性算子 L 和 M 是解决问题的关键所在。

事实上,即使找到了算子 L 和 M,我们有时也不能得到方程(8.22)的非平凡解。例如,取一组线性算子 L 和 M 如下:

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t) \qquad M = \frac{\partial}{\partial x}$$

那么,显然有

$$L_t = u_t \qquad [M,L] = u_x \qquad L_t = [M,L]$$

由此可推出 $u_t = u_x$,从而 $u = f(x+t)$。这是行波解,我们并没有得出有意义的新解。

对于一般的方程(8.22),我们难以找到满足条件的线性算子 L 和 M,但对于若干类非线性偏微分方程我们已成功地找到了这样的线性算子 L 和 M,例如

非线性薛定谔方程。

下面考虑更一般的情况，所谓的 AKNS。我们在方程组(8.25)的第一个方程中取

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & -\mathrm{i}q(x,t) \\ r(x,t) & -\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Psi}(x,t)=\begin{pmatrix} \Psi_1(x,t) \\ \Psi_2(x,t) \end{pmatrix}$$

这里 $q(x,t)$ 和 $r(x,t)$ 均为任意可微函数，这样式(8.25)的第一个方程可写为

$$\begin{cases} \mathrm{i}\Psi_{1x}-\mathrm{i}q\Psi_2=\lambda\Psi_1 \\ \mathrm{i}r\Psi_1-\mathrm{i}\Psi_{2x}=\lambda\Psi_2 \end{cases} \tag{8.27}$$

同样，如果在方程组(8.25)的第二个方程中取

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} A(x,t,\lambda) & B(x,t,\lambda) \\ C(x,t,\lambda) & -A(x,t,\lambda) \end{pmatrix}$$

那么方程(8.25)的第二个方程可写为

$$\begin{cases} \Psi_{1t}=A\Psi_1+B\Psi_2 \\ \Psi_{2t}=C\Psi_1-A\Psi_2 \end{cases} \tag{8.28}$$

将式(8.27)中的两个方程的两边对变量 t 求偏导得

$$\begin{cases} \mathrm{i}\Psi_{1xt}-\mathrm{i}q_t\Psi_2-\mathrm{i}q\Psi_{2t}=\lambda\Psi_{1t} \\ \mathrm{i}r_t\Psi_1+\mathrm{i}r\Psi_{1t}-\mathrm{i}\Psi_{2xt}=\lambda\Psi_{2t} \end{cases} \tag{8.29}$$

将式(8.28)中的两个方程的两边对变量 x 求偏导得

$$\begin{cases} \Psi_{1xt}=A_x\Psi_1+A\Psi_{1x}+B_x\Psi_2+B\Psi_{2x} \\ \Psi_{2xt}=C_x\Psi_1+C\Psi_{1x}-A_x\Psi_2-A\Psi_{2x} \end{cases} \tag{8.30}$$

以式(8.30)代入式(8.29)得

$$\begin{cases} A_x\Psi_1+A\Psi_{1x}+B_x\Psi_2+B\Psi_{2x}=-\mathrm{i}\lambda\Psi_{1t}+q_t\Psi_2+q\Psi_{2t} \\ C_x\Psi_1+C\Psi_{1x}-A_x\Psi_2-A\Psi_{2x}=r_t\Psi_1+r\Psi_{1t}+\mathrm{i}\lambda\Psi_{2t} \end{cases} \tag{8.31}$$

利用式(8.27)和式(8.28)，在式(8.31)中消去 $\Psi_{1x},\Psi_{2x},\Psi_{1t},\Psi_{2t}$ 得

$$\begin{aligned} & A_x\Psi_1+A(-\mathrm{i}\lambda\Psi_1+q\Psi_2)+B_x\Psi_2+B(\mathrm{i}\lambda\Psi_2+r\Psi_1) \\ ={} & -\mathrm{i}\lambda(A\Psi_1+B\Psi_2)+q_t\Psi_2+q(C\Psi_1-A\Psi_2) \\ & C_x\Psi_1+C(-\mathrm{i}\lambda\Psi_1+q\Psi_2)-A_x\Psi_2-A(\mathrm{i}\lambda\Psi_2+r\Psi_1) \\ ={} & r_t\Psi_1+r(A\Psi_1+B\Psi_2)+\mathrm{i}\lambda(C\Psi_1-A\Psi_2) \end{aligned}$$

让上面两式中左右两边的 Ψ_1 和 Ψ_2 前的系数函数分别相等得

$$\begin{cases} A_x + Br = Cq \\ B_x + 2i\lambda B = q_t - 2Aq \\ C_x - 2i\lambda C = r_t + 2Ar \\ Cq - A_x = Br \end{cases}$$

事实上,在上面方程组中的第一个方程和第四个方程是完全相同的,于是上面方程组可化为

$$\begin{cases} A_x = Cq - Br \\ q_t = B_x + 2i\lambda B + 2Aq \\ r_t = C_x - 2i\lambda C - 2Ar \end{cases} \tag{8.32}$$

上面的过程说明:对于给定的初始条件 $r(x,0)$和 $q(x,0)$,我们可以用式(8.27)寻求离散特征值(它不随时间改变而改变)和初始时刻的特征函数 $\Psi_1(x,0,\lambda)$和 $\Psi_2(x,0,\lambda)$在$|x|\to+\infty$时确定散射数据。显然,如果给出一组 q_t、r_t、q 和 r,原则上由方程组(8.32)可求出 A、B 和 C。然后,我们可以利用方程组(8.28)求出特征函数 Ψ_1 和 Ψ_2 的渐近形式(在$|x|\to+\infty$)随时间的变化,再求出下一时刻的位势 $q(x,t)$和 $r(x,t)$。

事实上,解方程组(8.32)并非易事。下面就一种简单情况来解方程组(8.32)。将 A,B,C 取为λ 的三次多项式,即取

$$A = \sum_{j=0}^{3} \alpha^j \lambda^j \qquad B = \sum_{j=0}^{3} \beta^j \lambda^j \qquad C = \sum_{j=1}^{3} \gamma^j \lambda^j$$

以上面各式代入式(8.32)后,并比较各式两边 $\lambda^i(i=0,1,2,3,4)$系数可得

$$\begin{cases} \alpha_x^0 = \gamma^0 q - \beta^0 r \\ \alpha_x^1 = \gamma^1 q - \beta^1 r \\ \alpha_x^2 = \gamma^2 q - \beta^2 r \\ \alpha_x^3 = \gamma^3 q - \beta^2 r \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} q_t = \beta_x^0 + 2\alpha^0 q \\ \beta_x^1 + 2i\beta^0 + 2\alpha^1 q = 0 \\ \beta_x^2 + 2i\beta^1 + 2\alpha^2 q = 0 \\ \beta_x^3 + 2i\beta^2 + 2\alpha^3 q = 0 \\ \beta^0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r_t = \gamma_x^0 - 2\alpha^0 r \\ \gamma_x^1 - 2i\gamma^0 - 2\alpha^1 r = 0 \\ \gamma_x^2 - 2i\gamma^1 - 2\alpha^2 r = 0 \\ \gamma_x^3 - 2i\gamma^2 - 2\alpha^3 r = 0 \\ \gamma^3 = 0 \end{cases}$$

解上面三个方程组得

$$
\begin{cases}
\alpha^0 = \dfrac{1}{2}\alpha^2 qr - \dfrac{\mathrm{i}}{4}\alpha^3(qr_x - q_x r) + \alpha^0(0,t) \\
\alpha^1 = \dfrac{1}{2}\alpha^3 qr + \alpha^1(0,t) \\
\alpha^2 = \alpha^2(0,t) = \alpha^2(t) \\
\alpha^3 = \alpha^3(0,t) = \alpha^3(t)
\end{cases}
$$

和

$$
\begin{cases}
\beta^0 = \mathrm{i}\alpha^1(0,t)q + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\alpha^3 q^2 r - \dfrac{1}{2}\alpha^2 q_x - \dfrac{\mathrm{i}}{4}\alpha^3 q_{xx} \\
\beta^1 = \mathrm{i}\alpha^2 q - \dfrac{1}{2}\alpha^3 q_x \\
\beta^0 = \mathrm{i}\alpha^3 q \\
\beta^3 = 0
\end{cases}
$$

和

$$
\begin{cases}
\gamma^0 = \mathrm{i}\alpha^1(0,t)r + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\alpha^3 qr^2 + \dfrac{1}{2}\alpha^2 r_x - \dfrac{\mathrm{i}}{4}\alpha^3 r_{xx} \\
\gamma^1 = \mathrm{i}\alpha^2 r + \dfrac{1}{2}\alpha^3 r_x \\
\gamma^2 = \mathrm{i}\alpha^3 r \\
\gamma^3 = 0
\end{cases}
$$

以及

$$
\begin{cases}
q_t = -\dfrac{\mathrm{i}}{4}\alpha^3(q_{xxx} - 6qrq_x) - \dfrac{1}{2}\alpha^2(q_{xx} - 2q^2 r) + \mathrm{i}\bar{\alpha}^1 q_x + 2\bar{\alpha}^0 q \\
r_t = -\dfrac{\mathrm{i}}{4}\alpha^3(r_{xxx} - 6qrr_x) + \dfrac{1}{2}\alpha^2(r_{xx} - 2qr^2) + \mathrm{i}\bar{\alpha}^1 r_x - 2\bar{\alpha}^0 r
\end{cases} \tag{8.33}
$$

这里 $\bar{\alpha}^1 = \alpha^1(0,t)$，$\bar{\alpha}^0 = \alpha^0(0,t)$。如果让 q 和 r 满足某种关系，那么式(8.33)中的两个方程化成只有一个未知函数的方程，我们称这个过程为方程的约化。下面考虑几种简单的情况：

① 令 $\bar{\alpha}^0 = \bar{\alpha}^1 = \alpha^2 = 0$，$\alpha^3 = -4\mathrm{i}$。显然，如果取 $r = -1$，方程组(8.33)中的两个方程合并为一个方程，即 KdV 方程

$$
q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0
$$

如果取 $r = \mp q$，方程组(8.33)中的两个方程合并为 mKdV 方程

$$
q_t \pm 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0
$$

② 令 $\bar{\alpha}^0 = \bar{\alpha}^1 = \alpha^3 = 0$，$\alpha^2 = -2\mathrm{i}$。如果取 $r = \mp q^*$，方程组(8.33)中的两个方程合并为非线性薛定谔方程

$$q_t - iq_{xx} \mp 2iq^2 q^* = 0$$

这里 q^* 是 q 的复共轭。

从前面我们已经看到，对于 KdV 方程的初值问题，证明谱(即特征值)是常数的工作就相当于完成用反散射方法解 KdV 方程的一半工作。而对于 AKNS，只要将某一偏微分方程写成 Lax 对形式，即方程组(8.25)和(8.26)的形式，就相当于用反散射方法解 KdV 方程时证明谱是常数的工作。下面的工作是要决定 AKNS 的散射数据，然而这一工作与决定 KdV 方程的散射数据不一样，因为线性算子 L 一般不是自共轭算子。当 L 不是自共轭算子时，其特征值可以是复数。

解关于特征函数的方程组(8.27)得

$$\begin{cases} \Psi_{1x} = -i\lambda\Psi_1 + q\Psi_2 \\ \Psi_{2x} = i\lambda\Psi_2 + r\Psi_1 \end{cases} \tag{8.34}$$

为了方便起见，将上面的方程组写成矩阵的形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x} = -i\lambda\sigma_3 \boldsymbol{\Psi} + U\boldsymbol{\Psi} \tag{8.35}$$

这里

$$\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad U(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ r(x,t) & 0 \end{pmatrix}$$

下面来考虑特征函数的渐近行为。考虑所谓的零边界条件：即当 $|x| \to +\infty$ 时，位势 $q \to 0, r \to 0$。那么当 $|x| \to +\infty$ 时，方程组(8.35)的渐近形式为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x} = -i\lambda\sigma_3 \boldsymbol{\Psi}$$

上面方程组的一般解为

$$\boldsymbol{\Psi}(x,t,\lambda) = e^{-i\lambda x\sigma_3} \boldsymbol{\Psi}_0(t,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{10}(t,\lambda) \\ \Psi_{20}(t,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{10} e^{-i\lambda x} \\ \Psi_{20} e^{i\lambda x} \end{pmatrix}$$

由此可以很容易写出该方程组的两个基本解为

$$\boldsymbol{\Psi}_1(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Psi}_2(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda x} \end{pmatrix}$$

有了上面的知识之后，我们定义关于特征函数的方程组(8.35)的一个解矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(x,t,\lambda) = (\boldsymbol{\phi}_-(x,t,\lambda), \boldsymbol{\phi}_+(x,t,\lambda))$$

满足边值条件

$$\boldsymbol{\Phi}(x,t,\lambda) \to e^{-i\lambda x\sigma_3} \qquad \text{当 } x \to -\infty \text{ 时} \tag{8.36}$$

这里 $\boldsymbol{\phi}_-$ 和 $\boldsymbol{\phi}_+$ 是方程组(8.35)的解。式(8.36)写为分量形式：

$$\boldsymbol{\phi}_-(x,t,\lambda) \to \boldsymbol{\Psi}_1(x,\lambda) \quad \text{当 } x \to -\infty \text{ 时} \tag{8.37}$$

和

$$\boldsymbol{\phi}_+(x,t,\lambda)\to\boldsymbol{\Psi}_+(x,\lambda)\quad 当\ x\to-\infty 时 \tag{8.38}$$

类似地，可定义关于特征函数的方程组(8.35)的另一个解矩阵

$$\boldsymbol{\Psi}(x,t,\lambda)=(\boldsymbol{\Psi}_-(x,t,\lambda),\boldsymbol{\Psi}_+(x,t,\lambda))$$

满足边值条件

$$\boldsymbol{\Psi}(x,t,\lambda)\to e^{-i\lambda x\sigma_3}\quad 当\ x\to+\infty 时 \tag{8.39}$$

这里 $\boldsymbol{\Psi}_-$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_+$ 是方程组(8.35)的解。式(8.39)写为分量形式：

$$\boldsymbol{\Psi}_-(x,t,\lambda)\to\boldsymbol{\Psi}_1(x,\lambda)\quad 当\ x\to+\infty 时 \tag{8.40}$$

和

$$\boldsymbol{\Psi}_+(x,t,\lambda)\to\boldsymbol{\Psi}_2(x,\lambda)\quad 当\ x\to+\infty 时 \tag{8.41}$$

由上面边值条件定义的解 $\boldsymbol{\phi}_-(x,t,\lambda)$、$\boldsymbol{\phi}_+(x,t,\lambda)$、$\boldsymbol{\Psi}_-(x,t,\lambda)$和 $\boldsymbol{\Psi}_+(x,t,\lambda)$ 称为 Jost 解。

Jost 解有一些基本性质：

① 解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(x,t,\lambda)$和 $\boldsymbol{\Psi}(x,t,\lambda)$的行列式都为 1。我们只证 $\boldsymbol{\Phi}(x,t,\lambda)$ 的行列式为 1。记

$$\boldsymbol{\phi}_-(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix}\phi_1^-(x,t,\lambda)\\ \phi_2^-(x,t,\lambda)\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\phi}_+(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix}\phi_1^+(x,t,\lambda)\\ \phi_2^+(x,t,\lambda)\end{pmatrix}$$

那么由方程组(8.34)，有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\det[\boldsymbol{\Phi}(x,t,\lambda)]&=\frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix}\phi_1^- & \phi_1^+\\ \phi_2^- & \phi_2^+\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\partial_x\phi_1^- & \phi_1^+\\ \partial_x\phi_2^- & \phi_2^+\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\phi_1^- & \partial_x\phi_1^+\\ \phi_2^- & \partial_x\phi_2^+\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}-i\lambda\phi_1^-+q\phi_2^- & \phi_1^+\\ r\phi_1^-+i\lambda\phi_2^- & \phi_2^+\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\phi_1^- & -i\lambda\phi_1^++q\phi_2^+\\ \phi_2^- & r\phi_1^++i\lambda\phi_2^+\end{vmatrix}\\
&=-i\lambda\phi_1^-\phi_2^++q\phi_2^-\phi_2^+-r\phi_1^-\phi_1^+-i\lambda\phi_1^+\phi_2^-+\\
&\quad r\phi_1^-\phi_1^++i\lambda\phi_1^-\phi_2^++i\lambda\phi_1^+\phi_2^--q\phi_2^-\phi_2^+\\
&=0
\end{aligned}$$

由此有 $\det[\boldsymbol{\Phi}(x,t,\lambda)]=\delta(t,\lambda)$，在该式两边令 $x\to-\infty$ 得 $\delta(t,\lambda)=1$，即证明 $\boldsymbol{\Phi}(x,\lambda)$的行列式为 1。

② 因为 $\boldsymbol{\phi}_-$ 和 $\boldsymbol{\phi}_+$ 是方程组(8.35)满足不同边值条件的解，因此它们是线性无关的，从而它们可作为方程组(8.35)的一组基础解系。同理，$\boldsymbol{\Psi}_-$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_+$ 也可作为方程组(8.35)的一组基础解系。两组不同的基础解系之间可相互线性表出，因而存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(t,\lambda)$(称为 Monodromy 矩阵)使得

$$\boldsymbol{\Phi}(x,t,\lambda)=\boldsymbol{T}(t,\lambda)\cdot\boldsymbol{\Psi}(x,t,\lambda) \tag{8.42}$$

这里

$$T(t,\lambda)=\begin{pmatrix} a(t,\lambda) & -\hat{b}(t,\lambda) \\ b(t,\lambda) & \hat{a}(t,\lambda) \end{pmatrix} \tag{8.43}$$

对式(8.42)两边取行列式得

$$\det\boldsymbol{\Phi}(x,t,\lambda)=\det\boldsymbol{T}(t,\lambda)\cdot\det\boldsymbol{\Psi}(x,t,\lambda) \tag{8.44}$$

由于 $\det[\boldsymbol{\Phi}(x,t,\lambda)]=\det[\boldsymbol{\Psi}(x,t,\lambda)]=1$,于是由式(8.44)可得 $\det\boldsymbol{T}(t,\lambda)=1$,即有

$$a\hat{a}+b\hat{b}=1 \tag{8.45}$$

由式(8.42)有

$$T(t,\lambda)=\boldsymbol{\Psi}(x,t,\lambda)^{-1}\cdot\boldsymbol{\Phi}(x,t,\lambda) \tag{8.46}$$

因为解矩阵 $\boldsymbol{\Psi}(x,\lambda)$的行列式为 1,不难证明它的逆矩阵为

$$\boldsymbol{\Psi}(x,t,\lambda)^{-1}=(\boldsymbol{\Psi}_-,\boldsymbol{\Psi}_+)^{-1}=\begin{pmatrix} \Psi_2^+ & -\Psi_1^+ \\ -\Psi_2^- & \Psi_1^- \end{pmatrix}$$

这里 $\boldsymbol{\Psi}_-=(\Psi_1^-,\Psi_2^-)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\Psi}_+=(\Psi_1^+,\Psi_2^+)^{\mathrm{T}}$。于是

$$\begin{aligned} T(t,\lambda) &= \begin{pmatrix} \Psi_2^+ & -\Psi_1^+ \\ -\Psi_2^- & \Psi_1^- \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \phi_1^- & \phi_1^+ \\ \phi_2^- & \phi_2^+ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_1^-\Psi_2^+-\phi_2^-\Psi_1^+ & \phi_1^+\Psi_2^+-\phi_2^+\Psi_1^+ \\ \Psi_1^-\phi_2^--\Psi_2^-\phi_1^- & \Psi_1^-\phi_2^+-\Psi_2^-\phi_1^+ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W[\boldsymbol{\phi}_-,\boldsymbol{\Psi}_+] & W[\boldsymbol{\phi}_+,\boldsymbol{\Psi}_+] \\ W[\boldsymbol{\Psi}_-,\boldsymbol{\phi}_-] & W[\boldsymbol{\Psi}_-,\boldsymbol{\phi}_+] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这里 $W[\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\Psi}]$是方程组(8.35)的两组解的朗斯基行列式。比较式(8.43)和上式,我们得

$$\begin{cases} a(t,\lambda)=W[\boldsymbol{\phi}_-(x,t,\lambda),\boldsymbol{\Psi}_+(x,t,\lambda)] & \hat{b}(t,\lambda)=W[\boldsymbol{\Psi}_+(x,t,\lambda),\boldsymbol{\phi}_+(x,t,\lambda)] \\ b(t,\lambda)=W[\boldsymbol{\Psi}_-(x,t,\lambda),\boldsymbol{\phi}_-(x,t,\lambda)] & \hat{a}(t,\lambda)=W[\boldsymbol{\Psi}_-(x,t,\lambda),\boldsymbol{\phi}_+(x,t,\lambda)] \end{cases}$$

上面的过程还没有指出应当选择哪些量为散射数据。为此,我们将方程组(8.42)写成分量形式如下

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}_-=a\boldsymbol{\Psi}_-+b\boldsymbol{\Psi}_+ \\ \boldsymbol{\phi}_+=-\hat{b}\boldsymbol{\Psi}_-+\hat{a}\boldsymbol{\Psi}_+ \end{cases} \tag{8.47}$$

由式(8.47)的第一式得

$$a^{-1}\boldsymbol{\phi}_-=\boldsymbol{\Psi}_-+\frac{b}{a}\boldsymbol{\Psi}_+$$

上式有简单的物理意义,当 $x\to+\infty$时,上式右边趋于

$$\boldsymbol{\Psi}_1+\frac{b}{a}\boldsymbol{\Psi}_2$$

而当 $x\to-\infty$ 时,上式右边趋于 $a^{-1}\boldsymbol{\Psi}_1$。由此可以解释如下:左行波 $\boldsymbol{\Psi}_1$ 从右方入射,经过势位的作用,一部分 $a^{-1}\boldsymbol{\Psi}_1$ 透射到左方,为透射波,另一部分 $ba^{-1}\boldsymbol{\Psi}_2$ 被反射回右方,为反射波。类似于 KdV 方程,反射系数 $r(t,\lambda)=b(t,\lambda)/a(t,\lambda)$ 可作为散射数据之一。同理,由式(8.47)的第二式可得另一个反射系数 $\hat{r}(t,\lambda)=\hat{b}(t,\lambda)/\hat{a}(t,\lambda)$。我们可以证明 $a(t,\lambda)$ 关于 λ 可解析开拓到上半平面 $\mathrm{Im}\lambda>0$,而 $\hat{a}(t,\lambda)$ 关于 λ 可解析开拓到下半平面 $\mathrm{Im}\lambda<0$。

上面用 Monodromy 矩阵的元素决定了反射系数。然而,与 KdV 方程相比,我们还是没有决定离散特征值和归一化常数。下面将决定这些量。从前而可以看出,$a(t,\lambda)$ 和 $\hat{a}(t,\lambda)$ 关于 λ 的零点分别使得反射系数 $r(t,\lambda)$ 和 $\hat{r}(t,\lambda)$ 为无穷大。由此可确定 $a(t,\lambda)$ 和 $\hat{a}(t,\lambda)$ 关于 λ 的零点就是我们所要的离散特征值。

为了方便起见,设 $a(t,\lambda)$ 关于 λ 只有有限个单重零点 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$,那么

$$a(t,\lambda_j)=0\qquad \dot{a}(t,\lambda_j)=\frac{\partial a}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_j}\neq0\qquad j=1,2,\cdots,N$$

以 $\lambda=\lambda_j(j=1,2,\cdots,N)$ 代入式(8.47)的第一式有

$$\boldsymbol{\Phi}_-(x,t,\lambda_j)=b(t,\lambda_j)\boldsymbol{\Psi}_+(x,t,\lambda_j)\qquad j=1,2,\cdots,N \tag{8.48}$$

显然

$$\partial_\lambda a=\boldsymbol{W}[\partial_\lambda\boldsymbol{\Phi}_-,\boldsymbol{\Psi}_+]+\boldsymbol{W}[\boldsymbol{\Phi}_-,\partial_\lambda\boldsymbol{\Psi}_+] \tag{8.49}$$

利用方程组(8.34),一个直接的计算有

$$\partial_x\boldsymbol{W}[\partial_\lambda\boldsymbol{\Phi}_-,\boldsymbol{\Psi}_+]=-\mathrm{i}(\Psi_1^+\phi_2^-+\Psi_2^+\phi_1^-) \tag{8.50}$$

$$\partial_x\boldsymbol{W}[\boldsymbol{\Phi}_-,\partial_\lambda\boldsymbol{\Psi}_+]=\mathrm{i}(\Psi_1^+\phi_2^-+\Psi_2^+\phi_1^-) \tag{8.51}$$

将上面两式分别从 $(-l,x)$ 和 (x,l) 积分后相减,并令 $\lambda=\lambda_j$,利用式(8.48)并再令 $l\to+\infty$ 后,得

$$\partial_\lambda a(t,\lambda_j)=2\mathrm{i}b(t,\lambda_j)\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_1^-(x,\lambda_j)\Psi_2^-(x,\lambda_j)\mathrm{d}x$$

由此定义所谓归一化常数为

$$c_j(t,\lambda_j)=\left(2\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_1^-(x,\lambda_j)\Psi_2^-(x,\lambda_j)\mathrm{d}x\right)=\frac{\mathrm{i}b(t,\lambda_j)}{\partial_\lambda a(t,\lambda_j)}$$

于是当 $\mathrm{Im}\lambda_j>0$ 时,定义散射数据如下:

$$r(t,\lambda)\qquad \lambda_j\qquad c_j(t,\lambda_j)\qquad j=1,2,\cdots,N$$

类似地,利用 $\hat{a}(t,\lambda)$ 关于 λ 只有有限个单重零点可以定义另一组散射数据。

下面接下来的是要研究散射数据随时间变化的情况。从前面的知识可知，当$|x|\to+\infty$时，线性算子

$$M\to A_0(t,\lambda)\boldsymbol{\sigma}_3$$

这里 $A_0(t,\lambda)=\bar{\alpha}^0(t)+\bar{\alpha}^1(t)\lambda+\alpha^2(t)\lambda^2+\alpha^3(t)\lambda^3$，以 $\boldsymbol{\Psi}=h(t,\lambda)\boldsymbol{\phi}_-$ 代入 Lax 方程(8.25)的第二个方程得

$$(\partial_t h)\cdot\boldsymbol{\phi}_-+h\partial_t\boldsymbol{\phi}_-=hM\boldsymbol{\phi}_-$$

在上式两边让 $x\to-\infty$得

$$(\partial_t h)\cdot\boldsymbol{\Psi}_1=A_0h\sigma_3\boldsymbol{\Psi}_1$$

由此有

$$\partial_t h=A_0h$$

显然 $h(t,\lambda)=\eta(\lambda)\mathrm{e}^{\int_0^t A_0(t,\lambda)\mathrm{d}t}$ 是上面方程的一般解。事实上，如果直接以 Jost 解代入 Lax 方程(8.25)的第二个方程并令 $x\to-\infty$ 是得不到等式的，也即 Lax 方程的第二个方程不成立。因此在下面的运算中，将运用在无穷远处依赖于时间的解：

$$h(t,\lambda)\boldsymbol{\phi}_-(x,t,\lambda)\quad h(t,\lambda)\boldsymbol{\Psi}_-(x,t,\lambda)$$

$$h^{-1}(t,\lambda)\boldsymbol{\phi}_+(x,\lambda)\quad h^{-1}(t,\lambda)\boldsymbol{\Psi}_+(x,\lambda)$$

当 $x\to+\infty$时，由方程组(8.47)的第一个方程得

$$\boldsymbol{\phi}_-=a\boldsymbol{\Psi}_-+b\boldsymbol{\Psi}_+\to a\boldsymbol{\Psi}_1+b\boldsymbol{\Psi}_2$$

以 $\boldsymbol{\Psi}=h(t,\lambda)(a\boldsymbol{\Psi}_1+b\boldsymbol{\Psi}_2)$代入 Lax 方程(8.25)的第二个方程得

$$\partial_t(ha)\boldsymbol{\Psi}_1+\partial_t(hb)\boldsymbol{\Psi}_2=A_0ha\boldsymbol{\Psi}_1-A_0hb\boldsymbol{\Psi}_2$$

上式说明

$$\partial_t(ha)=A_0ha\qquad\partial_t(hb)=-A_0hb$$

因此

$$ha=\eta_a(\lambda)\mathrm{e}^{\int_0^t A_0(t,\lambda)\mathrm{d}t}\qquad hb=\eta_b(\lambda)\mathrm{e}^{-\int_0^t A_0(t,\lambda)\mathrm{d}t}$$

以 $h(t,\lambda)=\eta(\lambda)\mathrm{e}^{\int_0^t A_0(t,\lambda)\mathrm{d}t}$ 代入上面两式得

$$a(t,\lambda)=\frac{\eta_a(\lambda)}{\eta(\lambda)}=a(0,\lambda)=a(\lambda)$$

$$b(t,\lambda)=\frac{\eta_b(\lambda)}{\eta(\lambda)}\mathrm{e}^{-2\int_0^t A_0(t,\lambda)\mathrm{d}t}=b(0,\lambda)\mathrm{e}^{-2\int_0^t A_0(t,\lambda)\mathrm{d}t}=b(\lambda)\mathrm{e}^{-2\int_0^t A_0(t,\lambda)\mathrm{d}t}$$

上面的推导过程不论对于连续特征值还是对于离散特征值都成立，因此

$$b(t,\lambda_j)=b(\lambda_j)\mathrm{e}^{-2\int_0^t A_0(t,\lambda_j)\mathrm{d}t}=b_j\mathrm{e}^{-2\int_0^t A_0(t,\lambda_j)\mathrm{d}t}$$

从而得到

$$r(t,\lambda)=\frac{b(t,\lambda)}{a(t,\lambda)}=r(0,\lambda)\mathrm{e}^{-2\int_0^t A_0(t,\lambda)\mathrm{d}t}$$

$$c_j(t,\lambda_j)=\frac{\mathrm{i}b(t,\lambda_j)}{\partial_\lambda a(t,\lambda_j)}=c_j(0)\mathrm{e}^{-2\int_0^t A_0(t,\lambda_j)\mathrm{d}t}$$

同理,可以得到联系于 Monodromy 矩阵的元 $\hat{a}(t,\lambda)$的散射数据在关于特征值 λ 的下半平面随时间变化的情况如下:

$$\hat{r}(t,\lambda)=\frac{\hat{b}(t,\lambda)}{\hat{a}(t,\lambda)}=\hat{r}(0,\lambda)\mathrm{e}^{2\int_0^t A_0(t,\lambda)\mathrm{d}t}$$

$$\hat{c}_j(t,\hat{\lambda}_j)=\frac{\mathrm{i}\hat{b}(t,\lambda_j)}{\partial_\lambda \hat{a}(t,\lambda_j)}=\hat{c}_j(0)\mathrm{e}^{2\int_0^t A_0(t,\hat{\lambda}_j)\mathrm{d}t}$$

这里 $\hat{\lambda}_j(j=1,2,\cdots,\hat{N})$是 $\hat{a}(t,\lambda)$的有限个单重零点。

类似于解 KdV 方程,下面只需解所谓的 GLM 方程就可决定 AKNS 的位势 $q(x,t)$和 $r(x,t)$。事实上,可以很容易地推导出关于 KdV 方程和 AKNS 的 GLM 方程。下面以推导 AKNS 的 GLM 方程为例。按照反散射方法的通常做法,假设 Jost 解 $\boldsymbol{\Psi}_-(x,t,\lambda)$和 $\boldsymbol{\Psi}_+(x,t,\lambda)$可通过"三角核"写成积分形式:

$$\boldsymbol{\Psi}_-(x,t,\lambda)=\boldsymbol{\Psi}_1+\int_x^{+\infty}\boldsymbol{K}_-(x,s,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda s}\mathrm{d}s \tag{8.52}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_+(x,t,\lambda)=\boldsymbol{\Psi}_2+\int_x^{+\infty}\boldsymbol{K}_+(x,s,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda s}\mathrm{d}s \tag{8.53}$$

这里 $\boldsymbol{K}_-(x,y,t)=(K_-^1(x,y,t),K_-^2(x,y,t))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{K}_+(x,y,t)=(K_+^1(x,y,t),K_+^2(x,y,t))^{\mathrm{T}}$。以式(8.53)式代入式(8.35)得

$$\mathrm{i}\lambda\boldsymbol{\Psi}_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}-\boldsymbol{K}_+(x,x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}+\int_x^{+\infty}\partial_x\boldsymbol{K}_+(x,s,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda s}\mathrm{d}s$$

$$=(-\mathrm{i}\lambda\sigma_3+U)\left(\boldsymbol{\Psi}_2+\int_x^{+\infty}\boldsymbol{K}_+(x,s,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda s}\mathrm{d}s\right) \tag{8.54}$$

注意到

$$-\mathrm{i}\lambda\int_x^{+\infty}\boldsymbol{K}_+(x,s,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda s}\mathrm{d}s=-\int_x^{+\infty}\boldsymbol{K}_+(x,s,t)\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda s}$$

$$=\boldsymbol{K}_+(x,x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}+\int_x^{+\infty}\partial_s\boldsymbol{K}_+(x,s,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda s}\mathrm{d}s-\lim_{s\to+\infty}\boldsymbol{K}_+(x,s,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda s}$$

以上式代入式(8.54)化简后并写成分量形式得

$$\int_x^{+\infty}(\partial_x K_+^1 - \partial_s K_+^1 - qK_+^2)e^{i\lambda s}ds - (q + 2K_+^1)e^{i\lambda x} + \lim_{s\to+\infty} K_+^1(x,s,t)e^{i\lambda s} = 0 \tag{8.55}$$

$$\int_x^{+\infty}(\partial_x K_+^2 + \partial_s K_+^2 - rK_+^1)e^{i\lambda s}ds - \lim_{s\to+\infty} K_+^2(x,s,t)e^{i\lambda s} = 0 \tag{8.56}$$

由式(8.55)和式(8.56),有

$$\begin{cases}\partial_x K_+^1(x,s,t) - \partial_s K_+^1(x,s,t) - q(x,t)K_+^2(x,s,t) = 0\\ \partial_x K_+^2(x,s,t) - \partial_s K_+^2(x,s,t) - r(x,t)K_+^1(x,s,t) = 0\\ q(x,t) + 2K_+^1(x,x,t) = 0 \quad \lim\limits_{s\to+\infty} K_+^1(x,s,t)e^{i\lambda s} = 0 \quad \lim\limits_{s\to+\infty} K_+^2(x,s,t)e^{i\lambda s} = 0\end{cases} \tag{8.57}$$

同理可证

$$\begin{cases}\partial_x K_-^1(x,s,t) + \partial_s K_-^1(x,s,t) - q(x,t)K_-^2(x,s,t) = 0\\ \partial_x K_-^2(x,s,t) + \partial_s K_-^2(x,s,t) - r(x,t)K_-^1(x,s,t) = 0\\ r(x,t) + 2K_-^2(x,x,t) = 0 \quad \lim\limits_{s\to+\infty} K_+^1(x,s,t)e^{i\lambda s} = 0 \quad \lim\limits_{s\to+\infty} K_-^2(x,s,t)e^{i\lambda s} = 0\end{cases} \tag{8.58}$$

类似地,对于其他两个 Jost 解,我们也有

$$\boldsymbol{\phi}_-(x,t,\lambda) = \boldsymbol{\Psi}_1 + \int_x^{+\infty}\boldsymbol{H}_-(x,s,t)e^{-i\lambda s}ds \tag{8.59}$$

$$\boldsymbol{\phi}_+(x,t,\lambda) = \boldsymbol{\Psi}_2 + \int_x^{+\infty}\boldsymbol{H}_+(x,s,t)e^{i\lambda s}ds \tag{8.60}$$

这里 $\boldsymbol{H}_-(x,y,t) = (H_-^1(x,y,t), H_-^2(x,y,t))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{H}_+(x,y,t) = (H_+^1(x,y,t), H_+^2(x,y,t))^{\mathrm{T}}$。

现在,我们记

$$\begin{cases}F(x,t) = F_c(x,t) + F_d(x,t) \qquad \hat{F}(x,t) = \hat{F}_c(x,t) + \hat{F}_d(x,t)\\ F_c(x,t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} r(t,\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \qquad F_d(x,t) = \sum_{j=1}^{N} c_j(t,\lambda_j)e^{i\lambda_j x}\\ \hat{F}_c(x,t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{r}(t,\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda \qquad \hat{F}_d(x,t) = \sum_{j=1}^{\hat{N}} \hat{c}_j(t,\hat{\lambda}_j)e^{-i\hat{\lambda}_j x}\end{cases}$$

将式(8.47)的第一式写为

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\boldsymbol{\phi}_- = r(\boldsymbol{\Psi}_+ - \boldsymbol{\Psi}_2) + r\boldsymbol{\Psi}_2 + (\boldsymbol{\Psi}_- - \boldsymbol{\Psi}_1) + (\boldsymbol{\Psi}_1 - \boldsymbol{\phi}_-)$$

$$= r(t,\lambda)\int_x^{+\infty} \boldsymbol{K}_+(x,s,t)e^{i\lambda s}ds + r(t,\lambda)\boldsymbol{\Psi}_2 +$$

$$\int_x^{+\infty} \boldsymbol{K}_-(x,s,t)e^{-i\lambda s}ds - \int_{-\infty}^{x} \boldsymbol{H}_-(x,s,t)e^{-i\lambda s}ds$$

将上式两边乘以 $e^{i\lambda y}(y>x)$,然后将两边从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分并利用傅里叶变换的卷积公式,有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{a(t,\lambda)}-1\right)\boldsymbol{\Phi}_-(x,t,\lambda)e^{i\lambda y}dy$$

$$= \int_x^{+\infty} \boldsymbol{K}_+(x,s,t)F_c(s+y,t)ds + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F_c(x+y,t) + \boldsymbol{K}_-(x,y,t)$$

另一方面,利用留数定理,有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{a(t,\lambda)}-1\right)\boldsymbol{\Phi}_-(x,t,\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda$$

$$= i\mathrm{Res}\left(\frac{1}{a(t,\lambda)}-1\right)\boldsymbol{\Phi}_-(x,t,\lambda)e^{i\lambda y}$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\frac{ib(t,\lambda_j)\boldsymbol{\Psi}_+(x,t,\lambda_j)}{\partial a(t,\lambda_j)}e^{i\lambda_j y}$$

$$= \sum_{j=1}^{N}c_j(t,\lambda_j)\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda_j(x+y)} + \int_x^{+\infty}\boldsymbol{K}_+(x,s,t)e^{i\lambda(s+y)}ds\right\}$$

$$= -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F_d(x+y,t) - \int_x^{+\infty}\boldsymbol{K}_+(x,s,t)F_d(s+y,t)ds$$

由此,可得到一个 GLM 方程

$$\boldsymbol{K}_-(x,y,t) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F(x+y,t) + \int_x^{+\infty}\boldsymbol{K}_+(x,s,t)F(s+y,t)ds = 0 \tag{8.61}$$

同理,可以推导出另一个为

$$\boldsymbol{K}_+(x,y,t) - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\hat{F}(x+y,t) - \int_x^{+\infty}\boldsymbol{K}_-(x,s,t)\hat{F}(s+y,t)ds = 0 \tag{8.62}$$

下面考虑单孤子情况。取 $r(t,\lambda)=\hat{r}(t,\lambda)=0, N=\hat{N}=1$,那么上面两个 GLM 方程可写为

$$K_-(x,y,t)-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}ce^{i\lambda(x+y)}-\int_x^{+\infty}K_+(x,s,t)ce^{i\lambda(s+y)}ds=0 \quad (8.63)$$

$$K_-(x,y,t)-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\hat{c}e^{-i\hat{\lambda}(x+y)}-\int_x^{+\infty}K_+(x,s,t)\hat{c}e^{-i\hat{\lambda}(s+y)}ds=0 \quad (8.64)$$

令 $K_-(x,y,t)=e^{i\lambda y}(\bar{K}_-^1(x,t),\bar{K}_-^2(x,t))$, $K_+(x,y,t)=e^{-i\hat{\lambda}y}(\bar{K}_+^1(x,t),\bar{K}_+^2(x,t))^{\mathrm{T}}$,那么式(8.63)和式(8.64)可写为

$$\begin{pmatrix}\bar{K}_-^1(x,t)\\\bar{K}_-^2(x,t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}ce^{i\lambda x}+\begin{pmatrix}\bar{K}_+^1(x,t)\\\bar{K}_+^2(x,t)\end{pmatrix}\frac{ce^{i(\lambda-\hat{\lambda})x}}{i(\lambda-\hat{\lambda})}=0 \quad (8.65)$$

$$\begin{pmatrix}\bar{K}_+^1(x,t)\\\bar{K}_+^2(x,t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\hat{c}e^{-i\hat{\lambda}x}+\begin{pmatrix}\bar{K}_-^1(x,t)\\\bar{K}_-^2(x,t)\end{pmatrix}\frac{ce^{i(\lambda-\hat{\lambda})x}}{i(\lambda-\hat{\lambda})}=0 \quad (8.66)$$

由此可得

$$\begin{cases}K_+^1(x,y)=\dfrac{1}{\Delta}\hat{c}e^{-i\hat{\lambda}(x+y)}\\[2ex] K_+^2(x,y)=-\dfrac{i}{(\hat{\lambda}-\lambda)\Delta}c\hat{c}e^{i(2\lambda-\hat{\lambda})x}e^{-i\hat{\lambda}y}\\[2ex] K_-^1(x,y)=-\dfrac{i}{(\hat{\lambda}-\lambda)\Delta}c\hat{c}e^{i(\lambda-2\hat{\lambda})x}e^{i\lambda y}\\[2ex] K_-^2(x,y)=\dfrac{1}{\Delta}ce^{i\lambda(x+y)}\end{cases}$$

这里 $\Delta=1+c\hat{c}e^{2i(\lambda-\hat{\lambda})x}/(\lambda-\hat{\lambda})^2$。由式(8.57)和式(8.58),有

$$\begin{cases}q(x,t)=-2K_+^1(x,x,t)=-\dfrac{2\hat{c}e^{-2i\hat{\lambda}x}}{\Delta}\\[2ex] r(x,t)=-2K_-^2(x,x,t)=-\dfrac{2ce^{2i\lambda x}}{\Delta}\end{cases}$$

如果考虑前面②中 $r=-q^*$ 的情况,那么在这种情况下的非线性薛定谔方程可写为

$$iq_t+q_{xx}+2q^2q^*=0$$

对于该方程,我们可以容易验证 $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2(\lambda_2>0)$, $\hat{\lambda}=\lambda_1-i\lambda_2$, $\hat{c}=c^*$(c 的共轭复数),且

$$c(t,\lambda)=c(0)e^{4i(\lambda_1+i\lambda_2)^2t}$$

因此由上面的过程,我们可以获得该方程的一个单孤子解

$$q(x,t)=2\lambda_2e^{-2\lambda_2x+4i(\lambda_1^2-\lambda_2^2)t-i(\theta_0+\frac{\lambda}{\pi})}\operatorname{sech}(2\lambda_2x-8\lambda_1\lambda_2t-x_0)$$

这里 $x_0=\ln\dfrac{|c(0)|}{2\lambda_2}$, $-ic(0)=|c(0)|e^{i\theta_0}$。

8.2 守恒律

常微分方程组的运动积分对约化常微分方程的维数起到十分重要的作用。如果把 KdV 方程看作是一个无限自由度的微分方程组的话,则它可能有运动积分,只是运动积分的记法与常微分方程组的运动积分不一样。设 T 和 X 是 KdV 方程的解 $u(x,t)$以及其导数的函数,如果下式成立

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial X}{\partial x}=0 \tag{8.67}$$

则称式(8.67)为 KdV 方程的一个守恒定律,其中 T 称为密度,而 X 称为流。如果当 $x\to\pm\infty$时,流 X 衰减至零,即 $X\to 0$ 的话,我们将式(8.67)两边对 x 从 $-\infty$到 $+\infty$积分得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} T\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial X}{\partial x}\mathrm{d}x = X\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

由此可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T\mathrm{d}x = K = \text{常数}$$

这类似于常微分方程的运动积分。

在式(8.67)中,引进所谓的函数 F 使得 $T=\frac{\partial F}{\partial x}$,那么以 $T=\frac{\partial F}{\partial x}$代入式(8.67)得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}+\frac{\partial X}{\partial x}=0$$

由此有 $X=-\frac{\partial F}{\partial t}$。显然

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial F}{\partial t}\right)=0$$

这种守恒律是普遍的。

对于 KdV 方程(8.2),显然有

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(-3u^2+u_{xx})=0$$

由此有$\int_{-\infty}^{+\infty} u\mathrm{d}x$ = 常数,这表示质量守恒。如果将 KdV 方程两边乘以 u 并经过适当的运算有

$$\frac{\partial u^2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[-2u^3-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=0$$

由此可得$\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\mathrm{d}x=$ 常数，这表示动量守恒。同样，如果对 KdV 方程作适当的变化，可得到下式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u^3+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{9}{2}u^4-3u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\right]$$

由此可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u^3+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x=\text{常数}\tag{8.68}$$

它表示系统的能量守恒。

事实上，KdV 方程存在无穷多个守恒量。

上面已证明 KdV 方程的孤立子在传播过程中是质量守恒、动量守恒和能量守恒的。这就说明孤立子在传播过程中具有相当的稳定性。这就解释了为什么两孤立子在碰撞后它们的波形和波速仍保持不变或只有微弱的变化。

在有限维情形下，可以利用 Hamilton 结构和首次积分来研究系统的完全可积性。事实上，KdV 方程是一个无穷维 Hamilton 系统，式(8.68)的右边就是 Hamilton函数，并且可以证明 KdV 方程不仅有无穷多个守恒量，而且它们还是对合的，因面是完全可积的。用 Hamilton 结构研究孤立子是孤立子研究的另一个途径。

思考题

1. 通过重复解 AKNS 的过程试解 KdV 方程(注意：我们在单独解 KdV 方程时的散射数据是直接给出的，用解 AKNS 的过程单独解 KdV 方程比解 AKNS 要简单一些)。

2. 试直接从解 GLM 方程出发，求 AKNS 的多孤子解。

3. 能否在你所研究的方向找到一个存在孤子解的模型。如果存在，用你找到的孤子解来解释你所研究的模型的物理行为。

参 考 文 献

[1] 黄文虎主编. 一般力学(动力学,振动与控制)最近进展. 北京: 科学出版社,1994.
[2] 木水共编. 走向混沌. 北京: 新科学研究第一辑,1995.
[3] 利昂·格拉斯, 迈克尔·C·麦基著,潘涛等译. 从摆钟到混沌——生命的节律. 上海: 上海远东出版社,1995.
[4] E. N. 洛化兹著,刘式达等译. 混沌的本质. 北京: 气象出版社,1997.
[5] 伊恩·斯图尔特著,潘涛译. 上帝掷骰子吗? 上海: 上海远东出版社,1995.
[6] 颜家壬. 孤立子简介. 现代物理知识. 1970, 5: 5-9.
[7] 许淞庆. 常微分方程稳定性理论. 上海: 上海科学技术出版社,1962.
[8] Hahn W. Stability of Motion. New York: Springer-Verlag, 1967.
[9] Rouche N, Habets P, Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method. New York: Springer-Verlag, 1977.
[10] 高为炳. 运动稳定性基础. 北京: 高等教育出版社,1988.
[11] 张芷芳,丁同仁, 黄文灶,董镇喜. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社,1997.
[12] Hirsch M W, Smale S. Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. New York: Academic Press, 1974.
[13] B. N. 阿诺尔德著,齐民友译. 经典力学的数学方法. 北京: 高等教育出版社,1992.
[14] Arnold V I. The Hamiltonian Nature of the Euler Equations in the Dynamics of a Rigid Body and of an Ideal Fluid. Usp Mat Nauk, 1969, 24: 225-226.
[15] 李继彬,赵晓华,刘正荣. 广义哈密顿系统理论及其应用. 北京: 科学出版社,1997.
[16] Holm D D, Marsden J E, Ratiu T, Weinstein A. Nonlinear Stability of Fluid and plasma equilibria. Physics Reports, 1985, 123: 1-116.
[17] Gao P. Hamiltonian Structure and First Integrals for the Lotka-Volterra Systems. Physics Letters A, 2000, 273: 85-96.
[18] Gao P. Two New Exactly Solvable Case of the Euler-Poisson Equations. Mechanics Research Communications, 2003, 30: 203-205.

[19] Carr J. Application of Center Manifold Theory. New York: Springer-Verlag, 1981.

[20] Holmes P J. Bifurcations to Divergence and Flutter in Flow-Induced Oscillations, A Finite Dimensional Analysis. J Sound Vibration, 1977, 53: 471 - 503.

[21] Scheidl K, Troger H, Zeman K. Coupled Flutter and Divergence Bifurcation of a Double Pendulum. Int J Non-linear Mech, 1983, 19: 163 - 176.

[22] Aulbach B. Trouble with Linearization, Mathematics in Industry. Stuttgart: Teubner, 1984.

[23] Kelley A. The Stable, Center Stable, Center, Center Unstable and Unstable Manifolds. J Diff Eqns, 1967, 3: 546 - 570.

[24] Hirsch M W, Pugh C C, Shub M. Invariant Manifolds. New York: Springer-Verlag, 1977.

[25] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos. New York: Springer-Verlag, 1990.

[26] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer-Verlag, 1997.

[27] Bogdanov R I. Versal Deformations of a Singular Point on the Plane in the Case of Zero eigenvalues. Functional Anal Appl, 1975, 9: 144 - 145.

[28] Arnold V I. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983.

[29] Chow S N, Li C Z, Wang D. Normal Forms and Bifurcations of Planar Vector Fields. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[30] Williamson J. On an Algebraic Problem, Concerning the Normal Forms of Linear Dynamical Systems. Amer J of Math, 1963, 58: 141 - 163.

[31] Sternberg S. On the Structure of Local Homeomorphisms of Euclidean n-Space. Amer J Meth, 1958, 80: 623 - 631.

[32] 秦元勋. 微分方程所定义的积分曲线(上,下册). 北京: 科学出版社, 1959.

[33] 叶彦谦. 极限环论. 上海: 上海科学技术出版社, 1984.

[34] 张锦炎. 常微分方程的几何理论和分支问题. 北京: 北京大学出版社, 1981.

[35] 王树禾. 微分方程模型与混沌. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1999.

[36] Andronov A A, Vitt E A, Khaiken S E. Theory of Oscillators. Oxford: Pergamon Press, 1966.

[37] Goldstein H. Classical Mechanics, 2nd ed. Reading: Addison-Wesley, 1980.

[38] Gantmacher F. Lecture in Analytical Mechanics. Moscow: Mir, 1970.
[39] Marion J B. Classical Dynamics of Particles and Systems. New York: Academic Press, 1970.
[40] Coddington E A, Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. New York: McGraw-Hill, 1955.
[41] Hartman P. Ordinary Differential Equations. New York: Wiley, 1969.
[42] Hale J K. Ordinary Differential Equations. New York: Wiley, 1964.
[43] 张筑生. 微分动力系统原理. 北京：科学出版社，1999.
[44] 刘式达，刘式适. 孤波和湍流. 上海：上海科技教育出版社，1994.
[45] 刘式达，刘式适. 孤立波和同宿轨. 力学与实践，1991，4：9－15.
[46] 刘式达，刘式适. 湍流的 KdV-Burgers 方程模型. 中国科学(A)，1991，9：938－946.
[47] 管克英，高歌，Burgers-KdV 混合型方程行波解的定性分析，中国科学(A)，1987，1：64－73.
[48] Elnfeld E. Nonlinear Waves, Soliton and Chaos. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
[49] 刘式达，刘式适. 非线性动力学和复杂现象. 北京：气象出版社，1989.
[50] Frisch H. Turbulence. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
[51] Sagdeev R Z. Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. Harwood: Harwood Academic Press, 1984.
[52] 陆启韶. 分岔与奇异性. 上海：上海科技教育出版社，1995.
[53] Sattinger D H. Topics in Stability and Bifurcation Theory, Springer Lectures Notes in Mathematics, Vol. 309. New York: Springer-Verlag, 1973.
[54] Iooss G, Joseph D D. Elementary Stability and Bifurcation Theory. New York: Springer-Verlag, 1990.
[55] Ruelle D. Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory. New York: Academic Press, 1989.
[56] Wiggins S. Global Bifurcations and Chaos-Analytical Method. New York: Springer-Verlag, 1988.
[57] Marsden J E, McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer-Verlag, 1976.
[58] Abraham R, Marsden J E. Foundations of Mechanics. Readings: Benjamin/Cummings, 1978.
[59] Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. Theory and Applications of Hopf